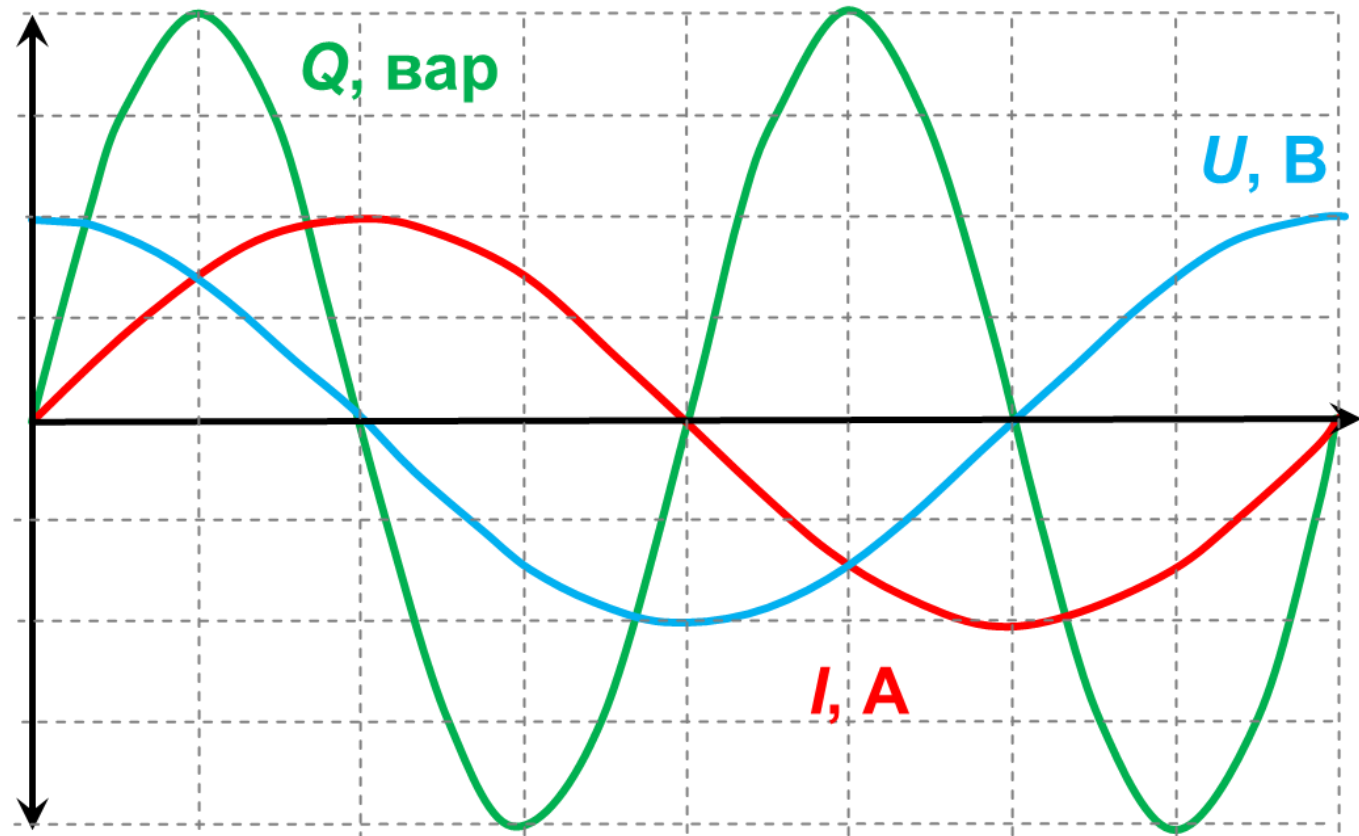


# Электрические цепи однофазного синусоидального тока



Разработал: к.т.н., доцент Пузаков А.В.  
кафедра ТЭРА, ОГУ

## Содержание раздела

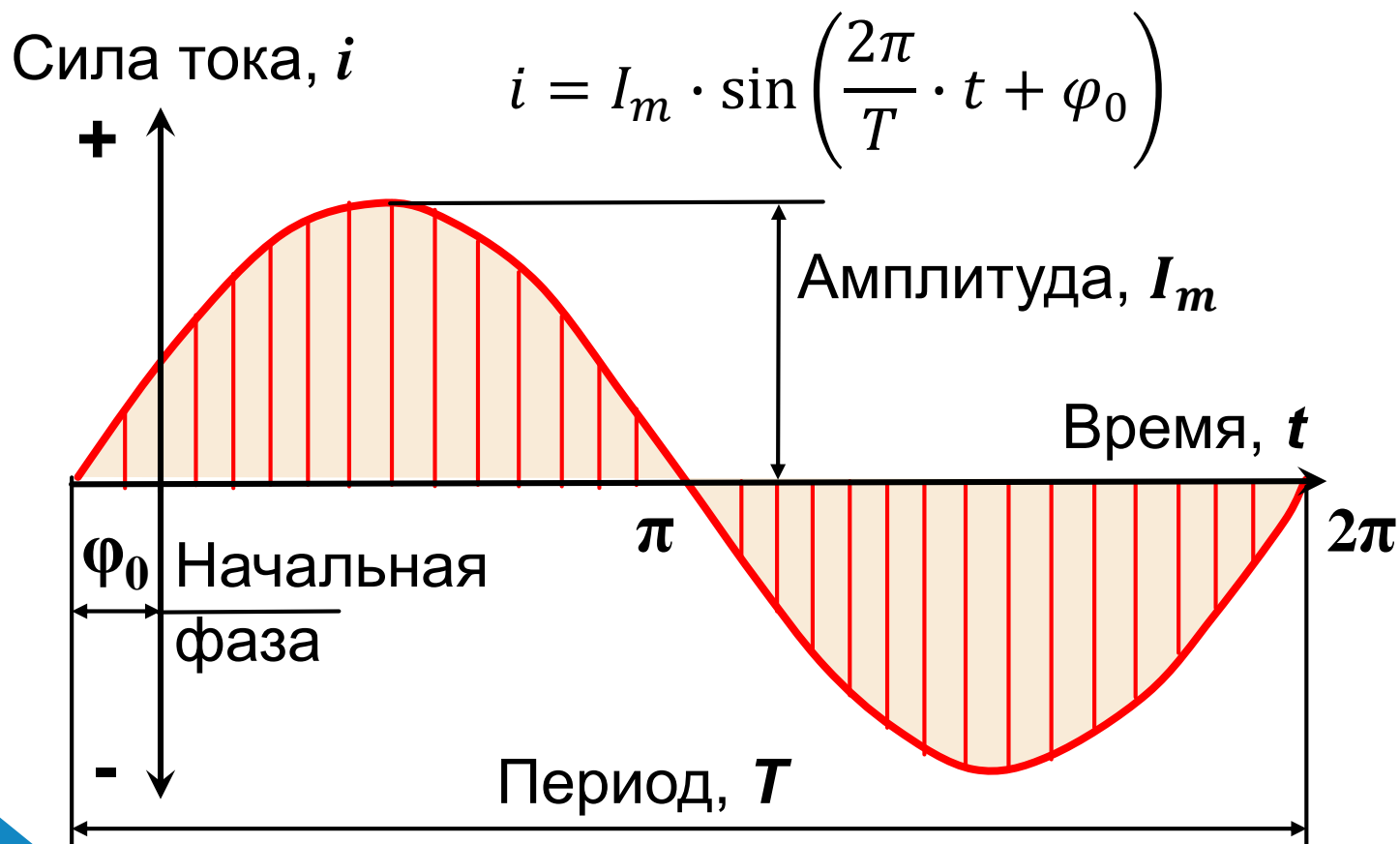
1. Основные определения
2. Элементы цепей переменного тока
3. Способы представления переменного тока
4. Анализ электрической цепи с резистором
5. Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором
6. Последовательное соединение элементов электрической цепи
7. Параллельное соединение элементов электрической цепи
8. Коэффициент мощности и его повышение
9. Заключение
10. Вопросы для самоконтроля
11. Литература по разделу

## Основные определения

Электрический ток, изменяющийся как по величине, так и по направлению называется **переменным**.

Наибольшее применение получил переменный ток, изменяющийся по гармоническому закону – **синусоидальный ток**.

Гармонические колебания характеризуются следующими величинами: *амплитудой, мгновенным значением, начальной фазой и частотой колебаний*.



## Основные определения

**Период** – время, за которое происходит одно полное колебание

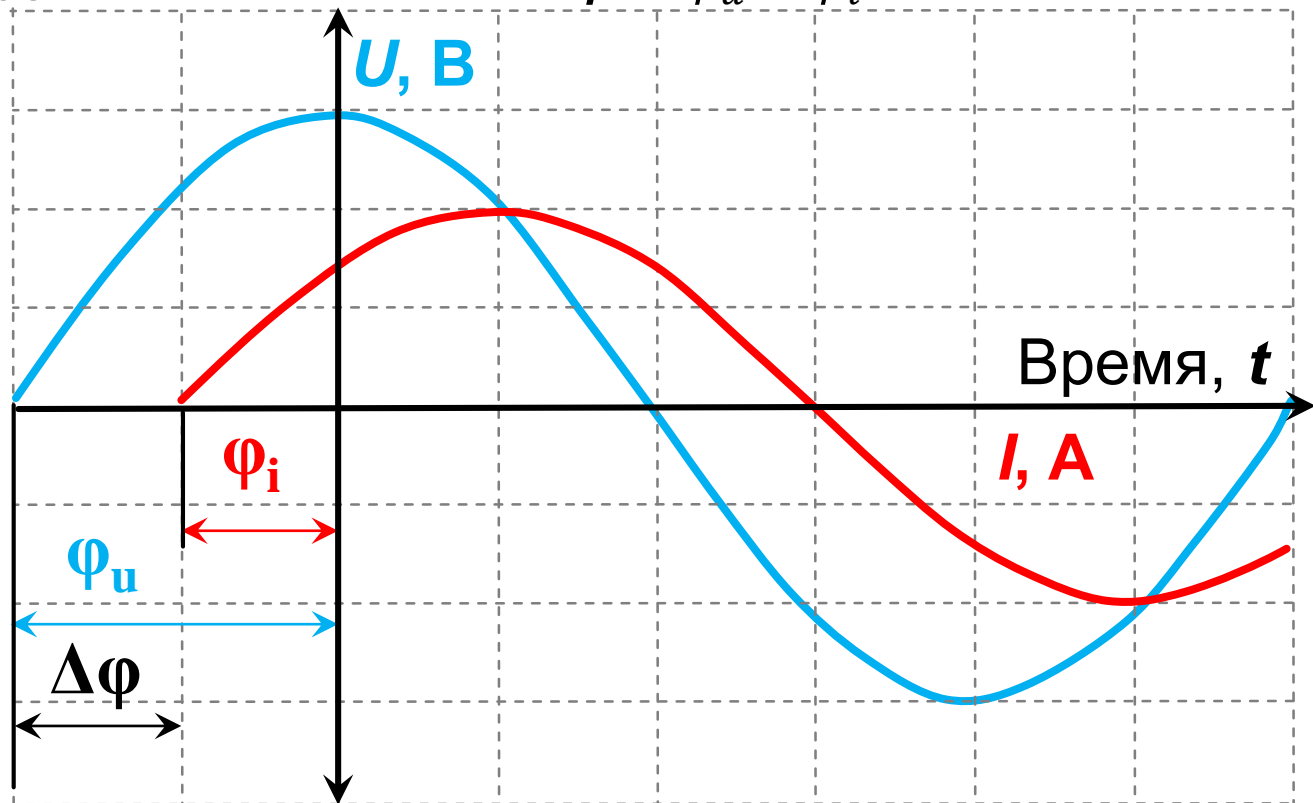
**Частота** – количество полных колебаний за 1 секунду.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{Частота измеряется в герцах, Гц}$$

Начальная фаза тока и напряжения характеризует его значение в момент времени  $t = 0$

Разность начальных фаз токов и напряжений называется сдвигом фаз

$$\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$



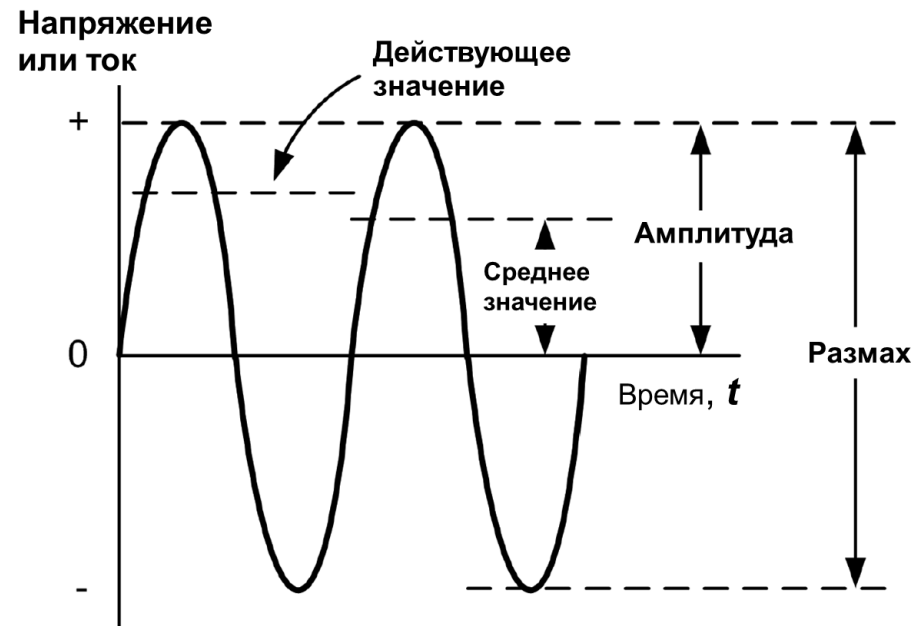
# Основные определения

Под **средним значением** синусоидально изменяющейся величины понимают ее среднее значение за полпериода.

$$I_{\text{cp}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m = 0,637 \cdot I_m$$

**Действующее значение** синусоидального тока численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m$$



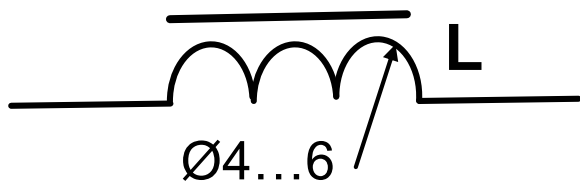
## Элементы цепей переменного тока

Элементами схем замещения цепей переменного тока являются помимо резистивных элементов *индуктивные* и *ёмкостные* элементы.

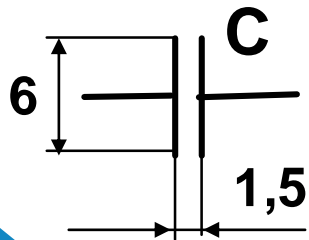
**Индуктивность** характеризует свойство элементов создавать собственное магнитное поле, когда по ним протекает электрический ток.

Это параметр является коэффициентом пропорциональности между током  $I$  и потокосцеплением  $\Psi$

$$\Psi = L \cdot I \quad \text{Единица измерения индуктивности, Гн [генри]}$$



Индуктивность



Ёмкость

**Ёмкость** характеризует свойство элементов накапливать заряды или возбуждать ими электрическое поле.

Является коэффициентом пропорциональности между напряжением  $U$  и зарядом элемента  $q$

$$q = C \cdot U$$

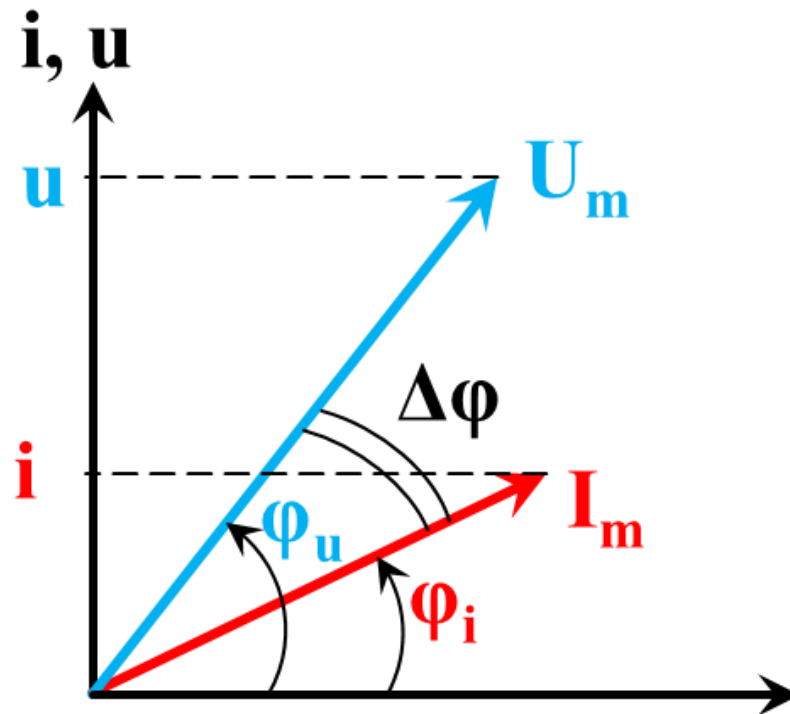
Единица измерения ёмкости,  $\Phi$  [фарад]

# Способы представления переменного тока

## Представление в виде вращающихся векторов

Проекция вращающегося радиуса-вектора на ось ординат определяет мгновенное значение синусоидальной величины.

Начальную фазы отсчитывают против часовой стрелки от положительной оси абсцисс.



# Способы представления переменного тока

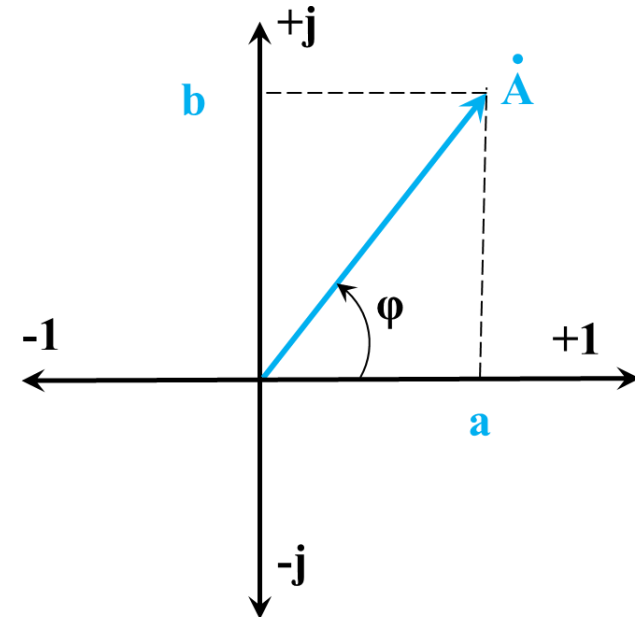
## Представление в виде комплексных чисел

Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует определенное число. Оно может быть представлено в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{A} = a + jb \\ \dot{A} = A \cdot \cos \varphi + jA \sin \varphi \\ \dot{A} = A \cdot e^{j\varphi} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} a \text{ и } b \text{ – проекции вектора на действительную и} \\ \text{мнимую ось} \\ \dot{A} \text{ и } A \text{ – вектор и модуль вектора} \\ \varphi \text{ – аргумент вектора} \end{array}$$

При анализе цепей переменного тока применяют главным образом комплексные значения величин.

Совокупность векторов токов и напряжений электрической цепи называют **векторной диаграммой**.



# Анализ электрической цепи с резистором

На вход цепи с резистивным элементом подано синусоидальное напряжение.

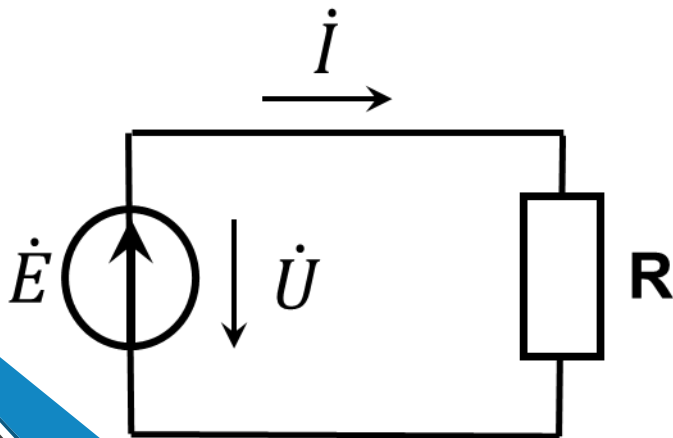
$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Определим ток и мощность в этой цепи.

По закону Ома сила тока в цепи

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad \text{где} \quad I_m = \frac{U_m}{R}$$

Из выражения следует, что ток и напряжение в цепи с резистором имеют одинаковую фазу.



Запишем закон Ома для цепи с резистором в комплексной форме

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_u} = U e^{j\varphi_u} \quad \dot{I} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{\underline{R}} = \frac{\dot{U}}{\underline{R}}$$

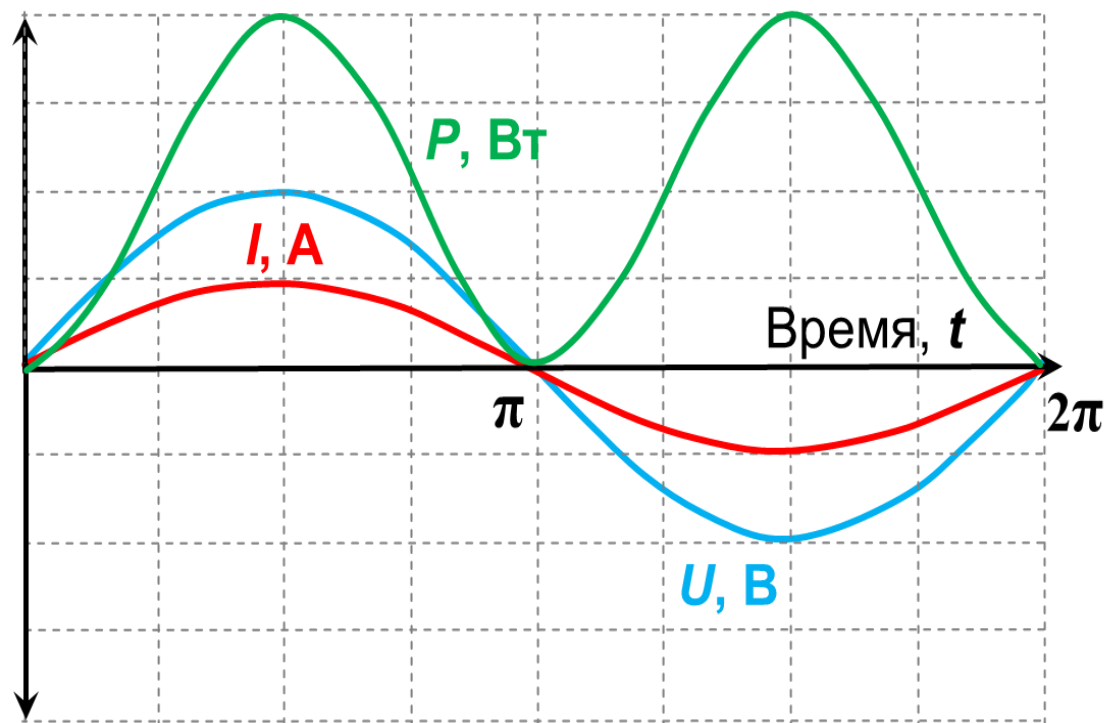
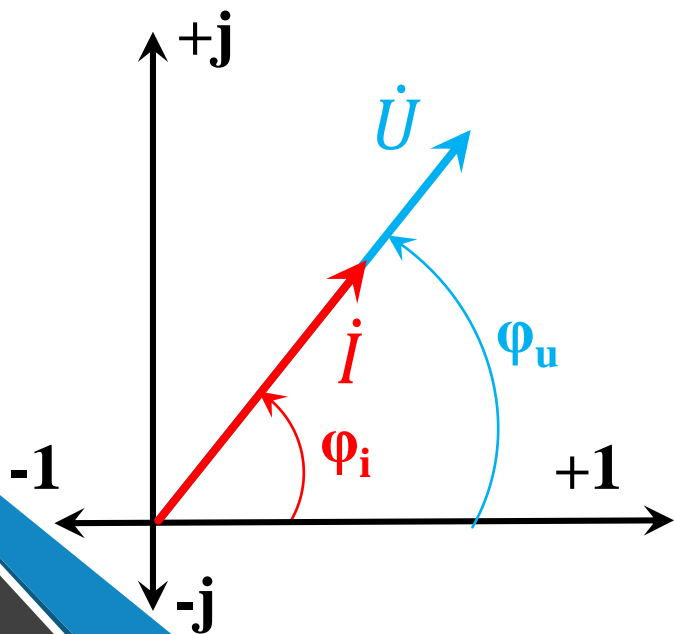
Комплекс тока  $\dot{I}$  в цепи с резистором равен отношению комплекса напряжения  $\dot{U}$  к комплексному сопротивлению резистора  $\underline{R}$

## Анализ электрической цепи с резистором

Запишем аналитическое выражение мгновенной мощности цепи с резистивным элементом

$$p = u \cdot i = U_m \cdot I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m \cdot I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

Мгновенная мощность резистора пульсирует с двойной угловой частотой, оставаясь все время положительной. Это означает, что при любом направлении тока энергия источника преобразуется в тепловую.



## Анализ электрической цепи с резистором

Средняя мощность в резисторе за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} IUT - \frac{1}{T} IU \int_0^T \cos 2\omega t dt = IU + 0$$

Мощность, преобразованную на резисторе называют **активной** мощностью.

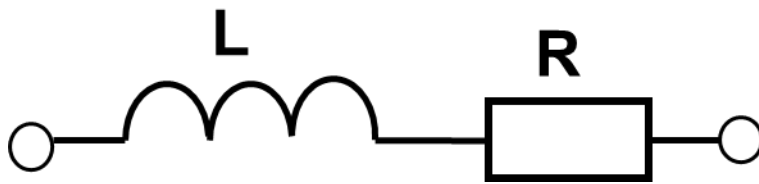
$$P = I \cdot U = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Единица измерения активной мощности, **Вт** [ватт]

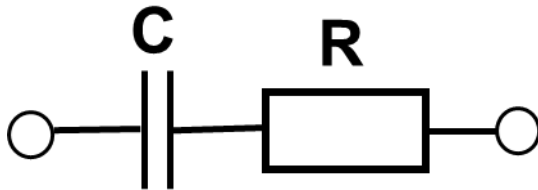
## Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором

*Идеальной индуктивной катушкой* называют такой элемент электрической цепи, в котором энергия источника электрической энергии, преобразуется только в энергию магнитного поля.

*Идеальным конденсатором* называют такой элемент электрической цепи, в котором энергия источника электрической энергии, преобразуется только в энергию электрического поля.



Реальная катушка индуктивности



Реальный конденсатор

## Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором

Переменный ток  $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$  создает на участках цепи с идеальной катушкой и идеальным конденсатором следующие напряжения

$$U_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d(I_m \sin(\omega t + \varphi_i))}{dt} = L\omega I_m \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \sin(\omega t + \varphi_{UL})$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \varphi_i) dt = \frac{I_m}{C\omega} \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right) = U_{Cm} \sin(\omega t + \varphi_{UC})$$

Из выражений следует:

1. Синусоидальный ток на участке с индуктивностью и емкостью вызывает синусоидальные напряжения той же угловой частоты.
2. Амплитуда напряжения на идеальных элементах пропорциональна амплитуде тока, причем пропорциональности имеют размерность сопротивления, которое называют *реактивным* сопротивлением

# Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором

Индуктивное сопротивление

$$X_L = L \cdot \omega$$

Индуктивная проводимость

$$B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{L \cdot \omega}$$

Ёмкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{C \cdot \omega}$$

Ёмкостная проводимость

$$B_C = \frac{1}{X_C} = C \cdot \omega$$

Начальные фазы тока и напряжения на идеальных элементах не совпадают

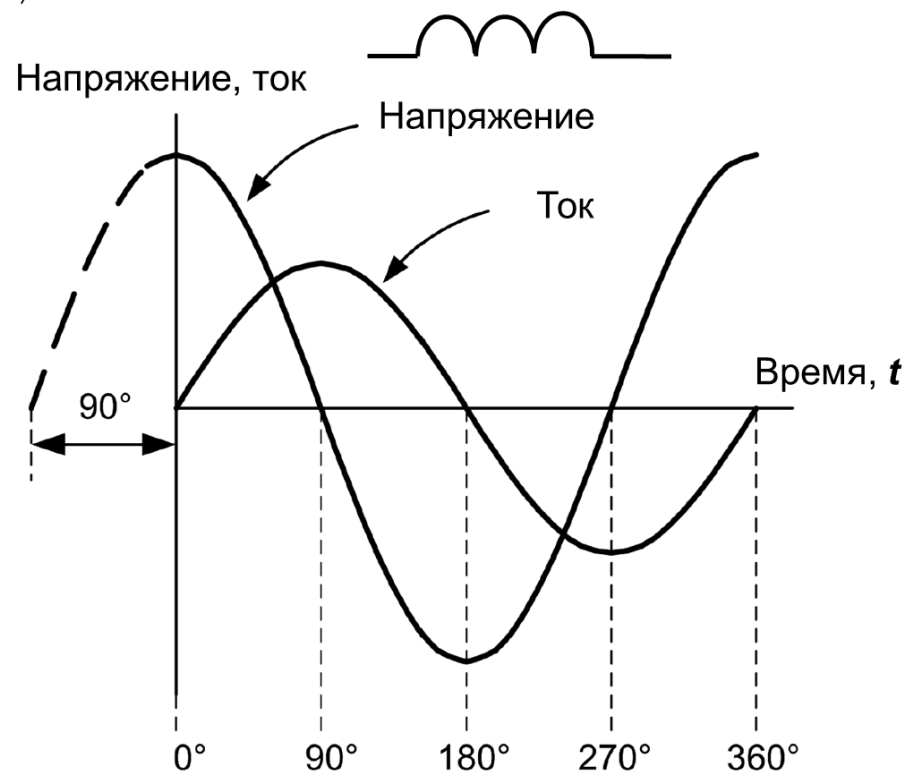
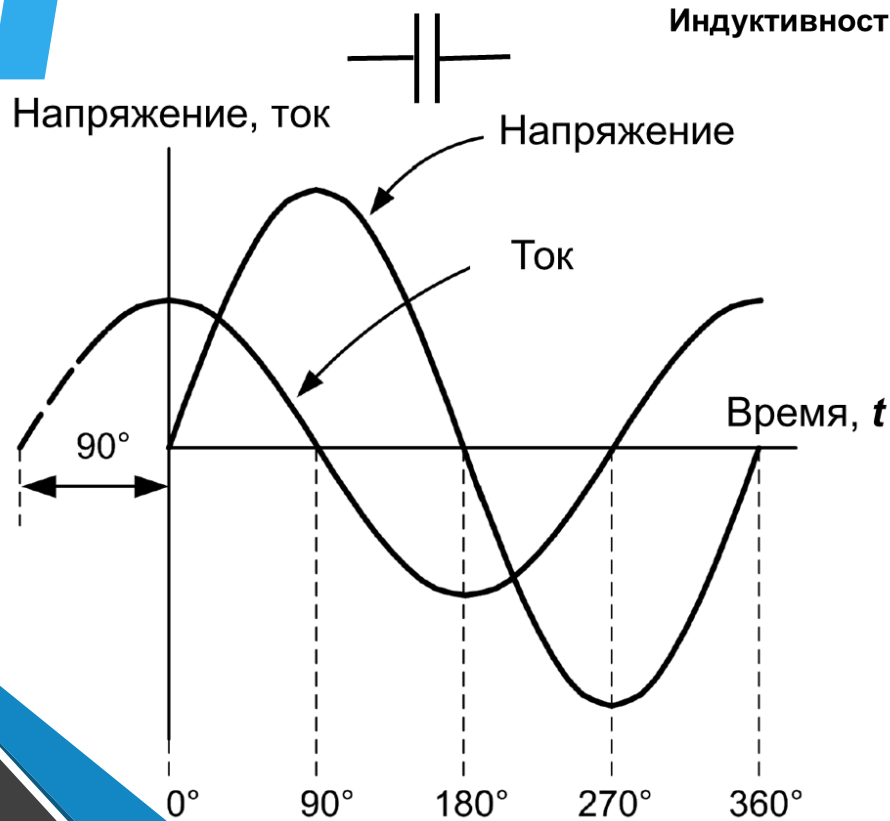
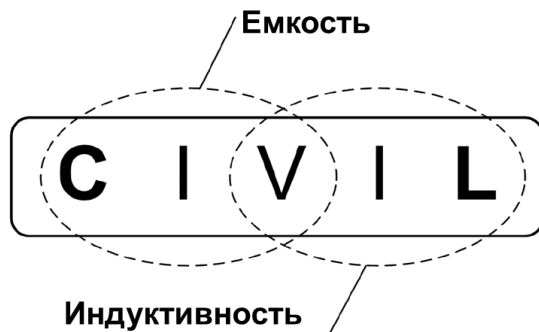
$$\begin{cases} \varphi_{UL} = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_{UC} = \varphi_i - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Разность начальных фаз между напряжением и током называют сдвигом фаз

$$\Delta\varphi_L = \frac{\pi}{2} \quad \Delta\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$$

На участке с индуктивностью напряжение опережает ток по фазе на  $90^\circ$ , а на участке с конденсатором отстает на  $90^\circ$ .

# Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором



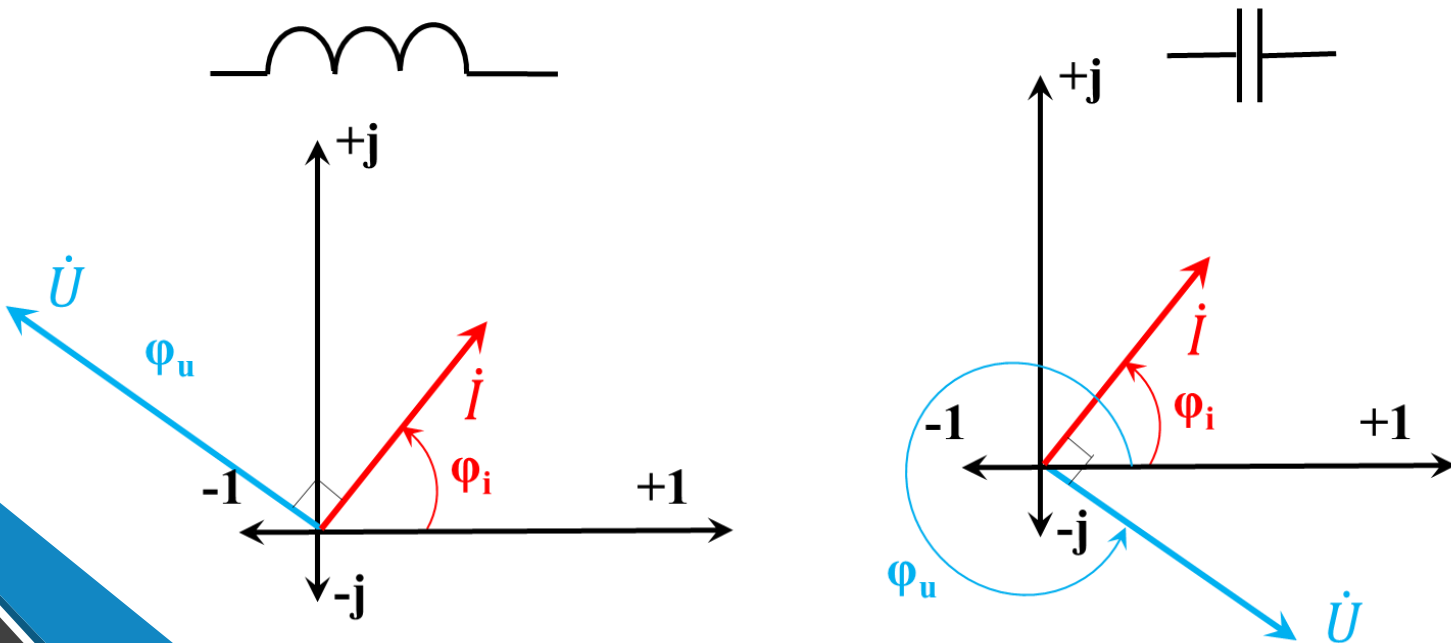
# Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором

Запишем закон Ома для идеальных элементов в комплексной форме

$$\dot{U}_L = j\dot{I}_L \cdot \omega L \qquad \dot{U}_C = (-j)\dot{I}_C \frac{1}{\omega C}$$

Комплексные сопротивления идеальных элементов соответственно равны

$$\underline{X}_L = j\omega L \qquad \underline{X}_C = -j \frac{1}{\omega C}$$



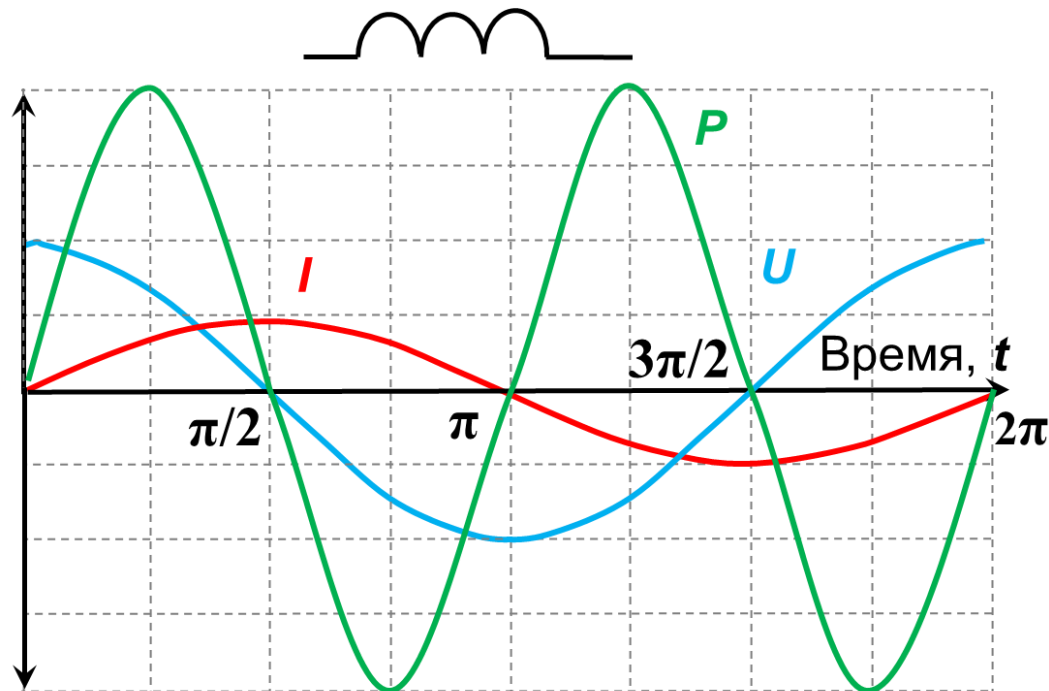
## Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором

В цепи с индуктивной катушкой в первую четверть периода  $i > 0$  и  $p > 0$ . В течение этого времени энергия источника преобразуется в энергию магнитного поля, в конце первой четверти она максимальна.

В третью четверть периода ток убывает, оставаясь положительным, но напряжение на индуктивности меняет знак, поэтому мгновенная мощность  $p$  в эту четверть периода отрицательна, то есть энергия магнитного поля возвращается источнику.

Среднее значение мощности на индуктивной катушке за период

$$p_L = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot u dt = 0$$



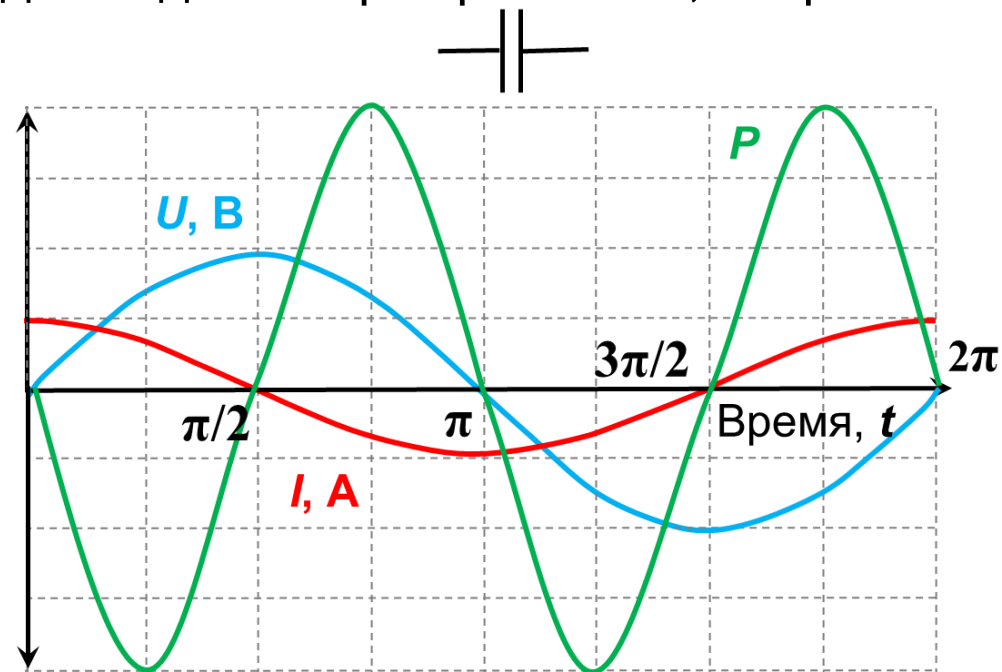
## Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором

Таким образом, в цепи с идеальной индуктивной катушкой происходит непрерывное колебание (обмен) энергии между источником и магнитным полем без затраты в среднем за период энергии этого источника.

Аналогичный процесс обмена энергией происходит на участке цепи с идеальным конденсатором. Здесь в первую четверть периода накопленная в конденсаторе энергия электрического поля возвращается источнику – мощность отрицательна.

В третью четверть периода конденсатор заряжается, энергия электрического поля возрастает за счет энергии источника.

$$p_c = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T i \cdot u dt = 0$$



## Анализ электрических цепей с индуктивной катушкой и конденсатором

Основным параметром мощности индуктивного и емкостного элемента является амплитуда обменной мощности, которую называют **реактивной**.

Причем реактивная мощность индуктивного элемента положительна

$$Q_L = U_L \cdot I_L = X_L \cdot I_L^2$$

а емкостного элемента – отрицательна

$$Q_C = -U_C \cdot I_C = -X_C \cdot I_C^2$$

Разные знаки  $Q_L$  и  $Q_C$  позволяют учесть противофазность кривых  $p_L = f(t)$  и  $p_C = f(t)$  при расчете реактивной мощности цепи содержащей и емкостные и индуктивные элементы.

Единица измерения реактивной мощности **Вар** [вольт-ампер реактивный]

# Последовательное соединение резистора и индуктивной катушки

Согласно второму закону Кирхгофа в комплексной форме справедливо

$$U = \dot{U}_R + \dot{U}_L$$

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot R + j\dot{I} \cdot X_L = \dot{I}(R + jX_L)$$

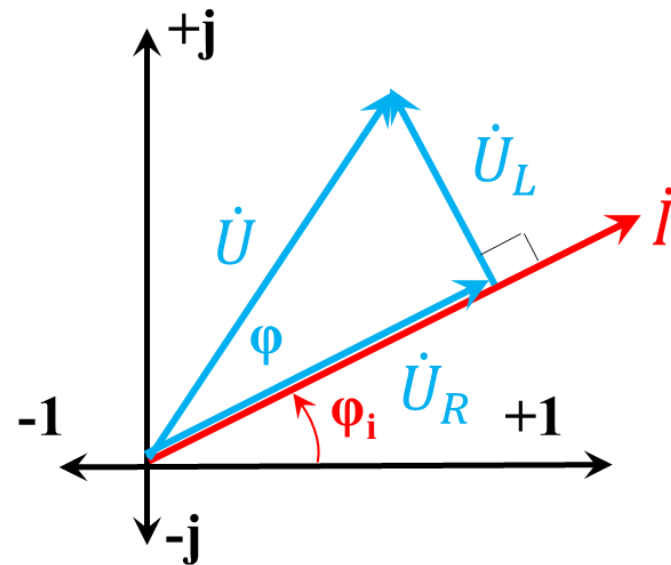
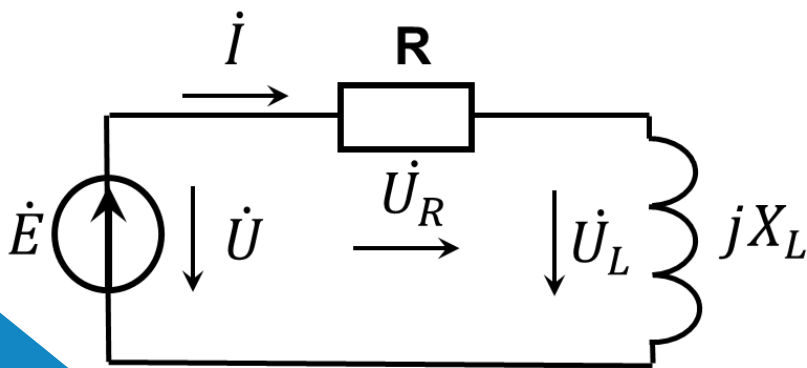
Выражение в скобках – **полное** сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \underline{R} + j\underline{X}_L \quad \underline{Y} = 1/\underline{Z} \quad \text{Полная проводимость}$$

Модуль и аргумент полного сопротивления

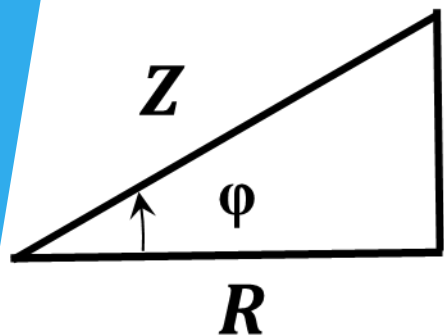
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad \varphi = \arctg \frac{X_L}{R}$$

На векторной диаграмме получен треугольник напряжений



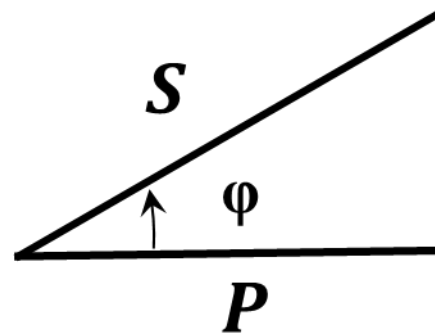
## Последовательное соединение резистора и индуктивной катушки

Если все стороны треугольника напряжений разделить на комплекс тока, получим *треугольник сопротивлений*



$jX_L$

Треугольник  
сопротивлений



$Q$

Треугольник  
мощностей

Рассматриваемая цепь характеризуется активной и реактивной мощностью

$$P = I \cdot U_R = I^2 \cdot R = I \cdot U \cdot \cos\varphi$$

$$Q = I \cdot U_L = I^2 \cdot X_L = I \cdot U \cdot \sin\varphi$$

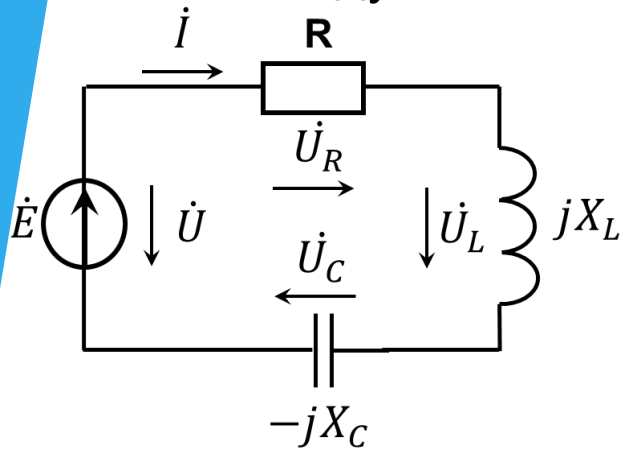
Произведение действующих значений тока и напряжения называют **полной** мощностью

$$S = I \cdot U \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

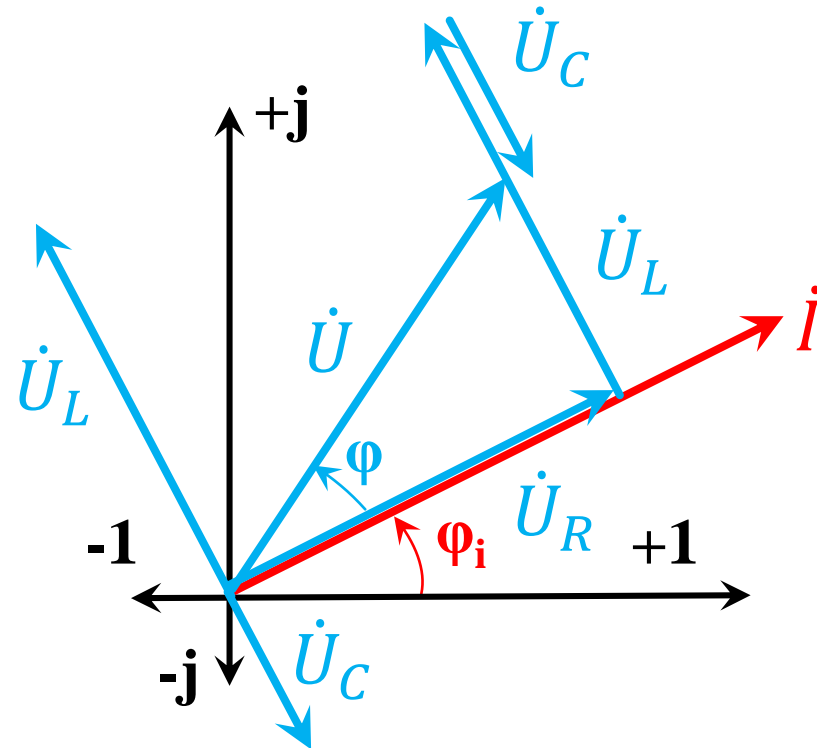
Единица измерения полной мощности - **В·А** (Вольт-Ампер)

# Последовательное соединение резистора, катушки и конденсатора

Векторная диаграмма построена для случая  $X_L > X_C$  и цепь имеет индуктивный характер.



$$\dot{U} = \dot{i} \cdot R + j\dot{i} \cdot X_L - j\dot{i} \cdot X_C = \dot{i}[R + j(X_L - X_C)]$$



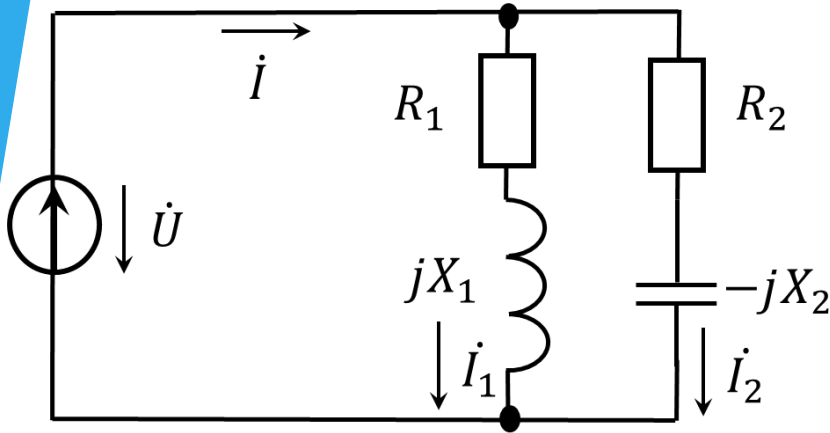
**Резонансом** называют такой режим работы, при котором напряжение и ток совпадают по фазе. В последовательной цепи возникает *резонанс напряжений*, если  $X_L = X_C$ .

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

При резонансе напряжения на индуктивности и емкости значительно больше приложенного напряжения

# Параллельное соединение элементов электрической цепи

Токи в ветвях согласно закону Ома соответственно равны

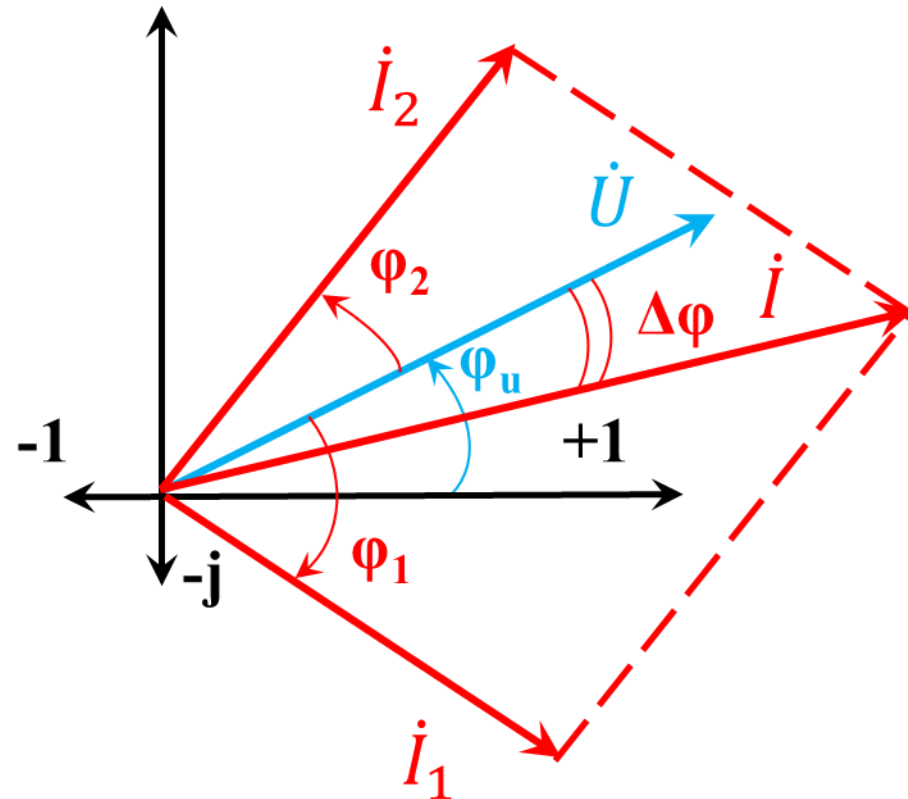


$$I_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + jX_1} \quad I_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - jX_2}$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1} \quad \varphi_2 = \arctg \frac{X_2}{R_2}$$

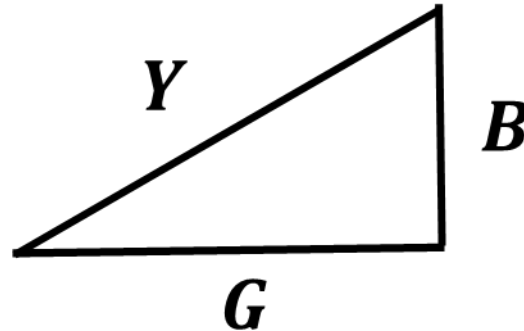
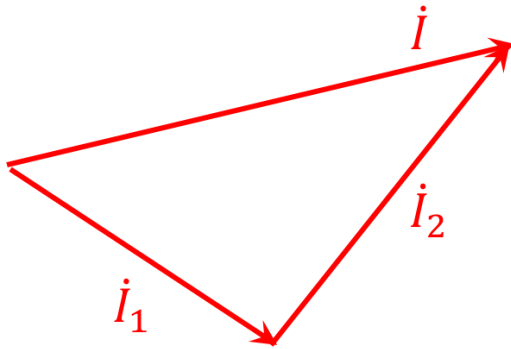
В параллельной цепи возникает **резонанс токов**, если  $X_L = X_C$ .

При резонансе токи в ветвях с индуктивностью и емкостью значительно больше тока в неразветвленной части цепи



## Параллельное соединение элементов электрической цепи

Параллельные цепи характеризуются треугольниками *токов*, *проводимостей* и *мощностей*



## Коэффициент мощности и его повышение

Большинство потребителей электрической энергии синусоидального тока представляют активно-индуктивные нагрузки, токи которых отстают по фазе от напряжения сети.

Для потребителей электрической энергии при заданном напряжении питающей сети  $U$  и потребляемой активной мощности  $P$ , ток потребителя зависит от величины  $\cos\varphi$

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$$

При  $\cos\varphi = 0.5$  и полной загрузке током генераторов, трансформаторов и сетей, потребителю может быть передана активная мощность, составляющая 50% от номинальной активной мощности. Таким образом, генераторы, трансформаторы и сеть будут полностью загружены по току и недогружены по активной мощности.

Поэтому величину  $\cos\varphi$ , характеризующую использование мощности источника энергии, называют **коэффициентом мощности**.

# Коэффициент мощности и его повышение

Работа потребителей с малым коэффициентом мощности, кроме ухудшения условий использования источника питания, приводит к увеличению мощности потерь в линиях передач, вследствие увеличения передаваемого тока.

Существует два способа увеличения коэффициента мощности, основанных на подключении к нагрузке приемника с емкостным током:

1. Применение синхронных двигателей, которые позволяют регулировать  $\cos\varphi$  при изменении тока возбуждения (синхронные компенсаторы).
2. Параллельно приемникам электрической энергии подключают конденсаторы



## Заключение

Электрический ток, изменяющийся как по величине, так и по направлению называется переменным.

Гармонические колебания характеризуются следующими величинами: амплитудой, мгновенным значением, начальной фазой и частотой колебаний.

Элементами схем замещения цепей переменного тока являются помимо резистивных элементов индуктивные и ёмкостные элементы.

Существует три способа представления синусоидальных величин: тригонометрический, в виде вращающихся векторов и с помощью комплексных чисел.

При анализе цепей переменного тока применяют главным образом комплексные значения величин. Совокупность векторов токов и напряжений электрической цепи называют векторной диаграммой.

Ток и напряжение в цепи с резистором имеют одинаковую фазу, на участке с конденсатором ток опережает напряжение, а на участке с индуктивностью наоборот, отстает.

## Заключение

Мгновенная мощность на участке с резистором называется активной. Она пульсирует с двойной угловой частотой, оставаясь все время положительной.

Идеальными называют такие элементы электрической цепи, внутри которых не возникает потерь энергии.

Амплитуда напряжения на идеальных элементах пропорциональна амплитуде тока, причем пропорциональности имеют размерность сопротивления, которое называют реактивным сопротивлением.

Основным параметром мощности индуктивного и емкостного элемента является амплитуда обменной мощности, которую называют реактивной.

Резонансом называют такой режим работы, при котором напряжение и ток совпадают по фазе. В последовательной цепи возникает резонанс напряжений, в параллельной – резонанс токов.

Поэтому величину, характеризующую использование мощности источника энергии, называют коэффициентом мощности. Для повышения коэффициента мощности в систему электроснабжения включают батарею конденсаторов.

## Вопросы для самоконтроля

1. Какой ток называют переменным? Пульсирующим?
2. Какими основными параметрами характеризуется синусоидальный ток?
3. Что называют периодом, частотой и амплитудой синусоидальной величины?
4. Что такое начальная фаза? Сдвиг фаз?
5. Каков физический смысл среднего и действующего значения синусоидального тока?
6. Что такое индуктивность? Какие реальные устройства обладают индуктивностью?
7. Что такое ёмкость? Какие реальные устройства обладают ёмкостью?
8. Какие способы представления синусоидальных величин Вы знаете?
9. Что называют комплексными числами?
10. Перечислите способы представления комплексных чисел и их применение
11. Что называют векторной диаграммой?

## Вопросы для самоконтроля

12. Какими соотношениями характеризуется цепь с резистивным элементом?
13. Как изменяется мгновенная мощность на участке с резистором?
14. Что называют активной мощностью?
15. Что называют идеальными элементами электрической цепи?
16. Какими соотношениями характеризуются участки с идеальными катушкой и конденсатором?
17. Что называют реактивным сопротивлением?
18. Как изменяется мгновенная мощность на участках с идеальными элементами?
19. Что называют реактивной мощностью?
20. Что такое импеданс?
21. Что называют полной мощностью?
22. Что такое резонанс? Чем резонанс токов отличается от резонанса напряжений? Условия возникновения резонанса.
23. Что характеризует коэффициент мощности? Каковы способы его повышения?
24. Что такое топографическая диаграмма?

1. Касаткин, А.С. Электротехника: учеб. для студентов неэлектротехн. специальностей вузов / А.С. Касаткин, М.В. Немцов. – 11-е изд., стер. – М.: Академия, 2008. – 544 с.
2. Хернер, А. Автомобильная электрика и электроника /А. Хернер, Х-Ю. Риль; перевод с нем. ЧМП РИА «GMM-пресс». – М.: ООО «Издательство «За рулём», 2013. – 624 с.
3. Wyatt, D. Aircraft Electrical and Electronic Systems / D. Wyatt, M. Tooley. – Second Edition – NY, Routledge, 2018 – 439 p.
4. Bell, J.A. Modern Diesel Technology: Electricity & Electronics / J.A. Bell - Second Edition – NY, Delmar, 2014 – 546 p.