

Министерство образования и науки
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

М.Н. Перунова

**ТРУДНЫЕ ВОПРОСЫ КУРСА ФИЗИКИ:
ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ**

Рекомендовано к изданию Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для поступающих в высшие учебные заведения

Оренбург

2014

УДК 537.6 (075.8)

ББК 22.334 я 73

П 27

Рецензент - кандидат физико-математических наук, доцент

М.Р. Расовский

Перунова, М.Н.

П 27

Трудные вопросы курса физики: Электромагнитная индукция: учебное пособие / М.Н. Перунова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2014. – 120 с.

В учебном пособии представлено систематическое изложение раздела «Электромагнитная индукция» общего курса физики. Особое внимание уделено выявлению физической природы ЭДС индукции в различных процессах, практической стороне курса – расчету ЭДС индукции, величины индукционного тока, механических сил, возникающих в системе в связи с появлением индукционных токов. Рассмотрены принципы работы распространенных технических устройств - генераторов, счетчиков электрической энергии, индукционных печей, двигателей постоянного тока. Все разделы иллюстрированы примерами решения задач, от простых до сложных.

Пособие может быть использовано в классах с углубленным изучением физики и лицами, занимающимися самообразованием.

УДК 537.6 (075.8)

ББК 22.334 я 73

© Перунова М.Н., 2014

© ОГУ, 2014

Содержание

Глава 1 Электромагнитная индукция	4
§1 Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции.....	4
§2 Магнитный поток.....	6
§3 Суть явления электромагнитной индукции.....	11
§4 Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея).....	19
§5 Примеры решения задач.....	31
§6 Униполярная машина.....	45
§7 Направление индукционного тока.....	47
§8 Токи Фуко.....	54
§9 Диамагнитный эффект.....	62
§10 Задачи для самостоятельного решения.....	67
Глава 2 Машина постоянного тока.....	69
§1 Двигатели и генераторы постоянного тока.....	69
§2 Примеры решения задач.....	83
§3 Задания для самоконтроля.....	87
Глава 3 Самоиндукция.....	93
§1 Явление самоиндукции.....	93
§2 Индуктивность проводника.....	95
§3 Экстратоки замыкания и размыкания цепи с индуктивностью.....	97
§4 Энергия магнитного поля.....	100
§5 Примеры решения задач.....	103
§6 Задания для самоконтроля.....	113
Список использованных источников.....	120

Глава 1 Электромагнитная индукция

§1 Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции

В 1820 году опыт Эрстеда показал, что проводник с током создает вокруг себя магнитное поле. В это же время опытами Ампера было показано, что со стороны магнитного поля на проводник с током действует сила. В течение последующих десяти лет ряд физиков пытались ответить на вопрос: если ток порождает магнитное поле, то может ли магнитное поле, в свою очередь, вызвать появление электрического тока?

Ответ на вопрос был получен в 1831 году англичанином Майклом Фарадеем. Американский физик Джозеф Генри несколькими годами ранее проделал аналогичные эксперименты, но их результаты не были опубликованы. Поэтому мы считаем Фарадея тем физиком, который сумел получить электрический ток при помощи магнитного поля.

Серия экспериментов Фарадея заключалась в следующем.

1 Две катушки накручены на общий железный сердечник. Одна катушка через ключ подключена к источнику постоянного тока. Вторая катушка замкнута на гальванометр (рисунок 1.1).

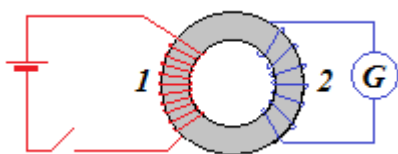


Рисунок 1.1

Гальванометр фиксирует наличие тока во второй катушке при замыкании или размыкании цепи первой катушки. Когда по первой катушке течет постоянный ток, ток во второй катушке отсутствует.

2 Катушка замкнута на гальванометр. Гальванометр фиксирует появление тока в катушке при внесении в нее магнита или при удалении магнита из катушки (рисунок 1.2). Ток появляется и том случае, если магнит неподвижен, перемещают катушку. Если относительное движение катушки и магнита отсутствует, ток в катушке не возникает.

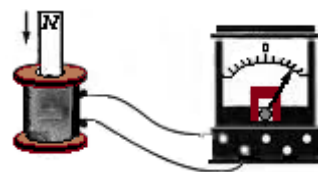


Рисунок 1.2

3 Постоянный магнит можно заменить на электромагнит (рисунок 1.3). Гальванометр опять-таки будет показывать наличие тока в катушке при относительном движении электромагнита и катушки. При отсутствии относительного движения катушки и электромагнита ток в катушке не возникает.

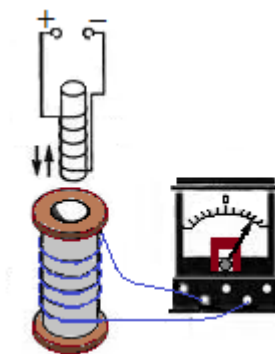


Рисунок 1.3

Во всех опытах в цепи катушки, замкнутой на гальванометр, появляется ток. Это удивительно, ибо источник тока в цепи катушки отсутствует! Что же явилось причиной появления тока?

1 Во всех трех опытах присутствует магнитное поле.

2 Магнитные линии этого поля пересекают плоскости витков катушки, в которой появляется ток.

3 Число магнитных линий пронизывающих катушку меняется (в первом опыте меняется ток, создающий магнитное поле, в двух других – движется постоянный магнит).

Заменим катушку на проволочный виток и расположим его параллельно магнитным линиям (рисунок 1.4). Будем перемещать магнит так, чтобы виток оставался параллельным магнитным линиям. В этом случае ток не возникает! Значит, причиной появления тока является не всякое изменение магнитного поля, а только такое, при котором **изменяется число магнитных линий, пронизывающих контур.**

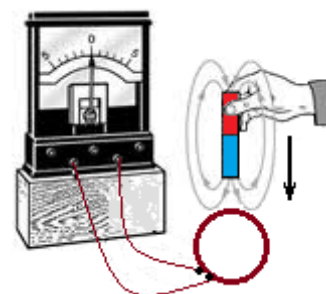


Рисунок 1.4

Электромагнитная индукция – это явление возникновения тока в замкнутом контуре при изменении числа магнитных линий, пронизывающих контур. Возникающий в этом случае ток называют индукционным.

Фарадею приписывают слова «Когда-нибудь государство будет брать деньги с налогоплательщиков за мое открытие». Слова действительно пророческие – открытие Фарадея лежит в основе современного промышленного

способа получения тока, а за использование этого тока налогоплательщики исправно платят деньги государству.

§2 Магнитный поток

Рассмотрим малую поверхность площадью dS , находящуюся в магнитном поле. Поскольку поверхность маленькая, можно считать ее плоской, а индукцию магнитного поля \vec{B} одинаковой в любой точке поверхности, даже если поле неоднородное (рисунок 1.5).

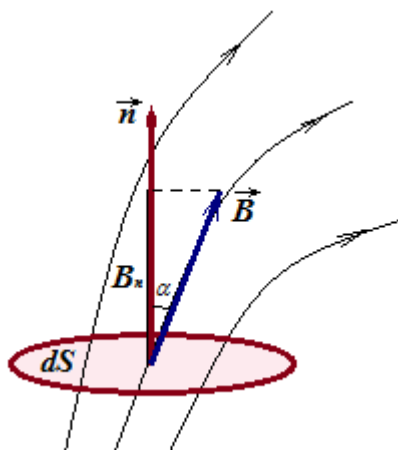


Рисунок 1.5

Выберем положительное направление вектора нормали к контуру \vec{n} .

Магнитным потоком через поверхность dS называется произведение модуля вектора магнитной индукции \vec{B} на площадь контура dS и косинус угла между вектором \vec{B} и нормалью к контуру \vec{n} :

$$d\Phi = B dS \cdot \cos \alpha = B_n dS. \quad (1)$$

Поток вектора магнитной индукции – скалярная величина, с этой величиной работают алгебраически. Для нахождения магнитного потока через произвольную поверхность ее разбивают на маленькие «кусочки» dS , считают поток через каждый маленький участок поверхности и результаты суммируют

$$\Phi = \int_S B dS \cdot \cos \alpha = \int_S B_n dS. \quad (2)$$

Магнитный поток зависит от трех факторов:

- 1) величины индукции магнитного поля B ;
- 2) площади поверхности dS ;
- 3) расположения поверхности в магнитном поле.

На последнем факторе остановимся более подробно.

Магнитный поток через плоскую поверхность в однородном магнитном поле максимален, когда поверхность расположена перпендикулярно магнитным линиям (рисунок 1.6). Если представить поверхность как некий каркас, затянутый пленкой, то магнитные линии, пронизывая поверхность, оставляют в пленке наибольшее количество разрывов.

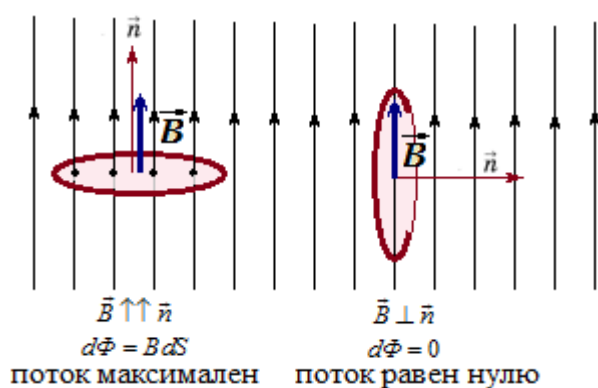


Рисунок 1.6

Когда поверхность параллельна магнитным линиям, разрывов в пленке, затягивающей каркас, нет. Магнитный поток в этом случае равен нулю. При любом другом положении поверхности в магнитном поле поток принимает любое значение в интервале $0 < d\Phi < B dS$.

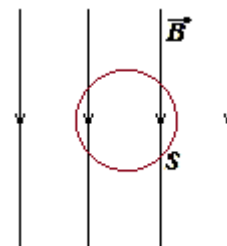
Можно заключить, что графическим аналогом магнитного потока является число магнитных линий, пронизывающих контур. Этот факт позволяет уточнить определение явления электромагнитной индукции.

Электромагнитная индукция – это явление возникновения тока в замкнутом контуре при изменении магнитного потока, пронизывающего контур.

Тест «Магнитный поток»

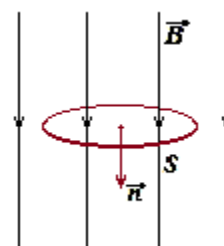
1 Чему равен магнитный поток, пронизывающий проволочный виток, помещенный в магнитное поле?

- А) 0;
- Б) BS ;
- В) Данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.



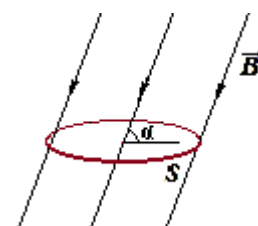
2 Чему равен магнитный поток, пронизывающий проволочный виток, помещенный в магнитное поле?

- А) 0;
- Б) BS ;
- В) Данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.



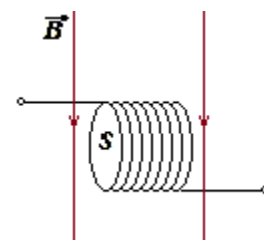
3 Чему равен магнитный поток, пронизывающий проволочный виток, помещенный в магнитное поле?

- А) 0;
- Б) BS ;
- В) $BS \cdot \sin \alpha$;
- Г) $BS \cdot \cos \alpha$.



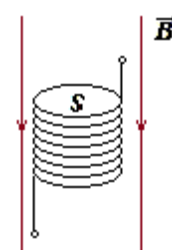
4 Чему равен магнитный поток, пронизывающий катушку, состоящую из N витков, помещенную в магнитное поле индукции B?

- А) 0;
- Б) BS ;
- В) BSN .
- Г) Данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ



5 Чему равен магнитный поток, пронизывающий катушку, состоящую из N витков, помещенную в магнитное поле индукции B?

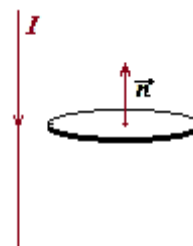
- А) 0;
- Б) BS ;



В) BSN ;

Г) Данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.

6 Чему равен магнитный поток, пронизывающий проволочный виток, помещенный в магнитное поле бесконечно длинного прямого проводника с током?

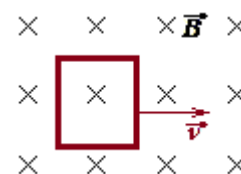


А) 0;

Б) BS ;

В) Данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.

7 Что происходит с магнитным потоком, пронизывающим проволочный виток, если он движется поступательно перпендикулярно магнитным линиям?

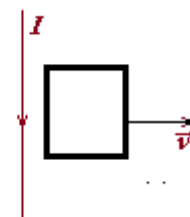


А) Увеличивается.

Б) Уменьшается.

В) Остается неизменным.

8 Проволочный виток двигают так, что он остается в одной плоскости с прямым проводником с током I . Что происходит с магнитным потоком, пронизывающим проволочный виток?

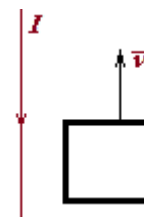


А) Увеличивается.

Б) Уменьшается.

В) Остается неизменным.

9 Проволочный виток двигают так, что он остается в одной плоскости с прямым проводником с током I . Что происходит с магнитным потоком, пронизывающим проволочный виток?

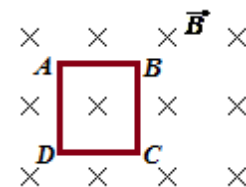


А) Увеличивается.

Б) Уменьшается.

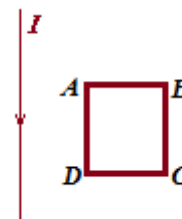
В) Остается неизменным.

10 Что произойдет с магнитным потоком, вводящим проволочный виток, если его повернуть относительно стороны AB на 90° ?



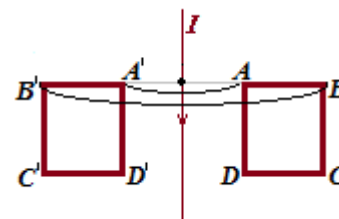
- А) Увеличится.
- Б) Уменьшится.
- В) Остается неизменным.

11 Что произойдет с магнитным потоком, пронизывающим проволочный виток, если его повернуть относительно стороны AB на 180° ?



- А) Увеличится.
- Б) Уменьшится.
- В) Остается неизменным.

12 Что произойдет с магнитным потоком, пронизывающим проволочный виток, если его переместить симметрично проводнику с током?



- А) Увеличится.
- Б) Уменьшится.
- В) Остается неизменным.

13 По катушке течет ток. Что произойдет с пронизывающим ее магнитным потоком, если ток в катушке начнет увеличиваться?

- А) Увеличится.
- Б) Уменьшится.
- В) Остается неизменным.

14 По катушке течет ток. Что произойдет с пронизывающим ее магнитным потоком, если в катушку вставить железный сердечник? После внесения в катушку сердечника ток в ней не изменился.

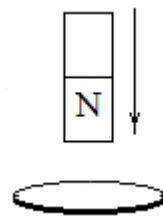
- А) Увеличится.
- Б) Уменьшится.
- В) Остается неизменным.

15 В проволочный виток вносят постоянный магнит. Что происходит с магнитным потоком, пронизывающим виток?

А) Увеличивается.

Б) Уменьшается.

В) Ответ зависит от того, каким полюсом магнит вносится в виток.



§3 Суть явления электромагнитной индукции

При изменении магнитного потока, пронизывающего контур, в нем возникает индукционный ток. Запишем для замкнутого контура с током закон Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где R – сопротивление самого контура;

r – внутреннее сопротивление источника.

Поскольку источник тока в контуре отсутствует, внутреннее сопротивление $r = 0$. Получаем $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Очевидно, если в контуре возник ток, в нем появилась ЭДС.

Вывод 1: при изменении магнитного потока, пронизывающего контур, в нем возникает ЭДС (ее называют ЭДС индукции - \mathcal{E}_i).

Вспомним, что такое ЭДС.

$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}$ - это величина, численно равная **работе сторонних сил** по переме-

щению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура.

Вывод 2: при изменении магнитного потока, пронизывающего контур, в нем *появляются сторонние силы*, приводящие заряды в направленное движение.

Какова природа этих сторонних сил?

1 Пусть в однородном магнитном поле расположена П - образная проводящая рамка, линии индукции магнитного поля перпендикулярны плоскости рамки. По рамке может скользить проводящий стержень. Будем перемещать стержень по рамке без нарушения контакта с ней. Магнитный поток, пронизывающий замкнутый контур, изменяется вследствие изменения площади контура. По контуру течет индукционный ток (рисунок 1.7). Что приводит заряды в направленное движение?

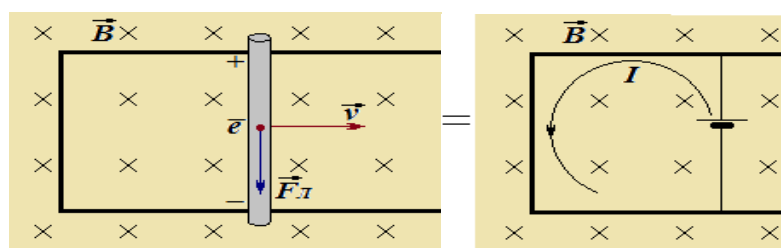


Рисунок 1.7

Проводник представляет собой кристаллическую решетку, в узлах которой располагаются положительные ионы, между ними двигаются свободные электроны. По существу в магнитном поле двигаются положительные ионы и электроны. На движущиеся в магнитном поле заряды действует сила Лоренца. Ее направление определяем по правилу левой руки (рисунок 1.8).



Рисунок 1.8

Положительные ионы не могут прийти в движение под действием силы Лоренца – они находятся в узлах кристаллической решетки. Под действием силы Лоренца начинают смещаться свободные электроны. На одном конце стержня образуется избыток отрицательного заряда, он приобретает отрицательный потенциал. На другом конце стержня создается недостаток электронов – этот конец проводника приобретает положительный потенциал.

Таким образом, проводящий стержень, движущийся в магнитном поле, становится источником тока (смотри рисунок 1.8). Роль сторонней силы в этом источнике играет сила Лоренца.

2 Рассмотрим другую ситуацию. Замкнутый контур расположен неподвижно в магнитном поле. Магнитное поле начинают изменять. Магнитный поток, пронизывающий контур изменяется вследствие изменения вектора магнитной индукции. По контуру течет индукционный ток. Что приводит заряды в направленное движение?

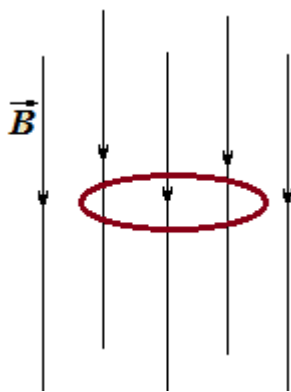


Рисунок 1.9

На заряженные частицы могут действовать два поля: электрическое и магнитное. Действие магнитного поля на заряды в данном случае исключается, ибо контур покоится, а сила Лоренца действует только на движущиеся заряды. Логично предположить, что при изменении магнитного поля появляется электрическое поле, оно то и приводит заряды в контуре в направленное движение. Это поле называется вихревым электрическим полем.

Сравним вихревое электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля, с уже известным нам электростатическим полем.

Важнейшее свойство электростатического поля - потенциальность, работа электростатического поля по перемещению заряда вдоль замкнутого контура равна нулю.

Вихревое электрическое поле приводит заряды в контуре в направленное движение. Протекание индукционного тока по контуру сопровождается выделением в проводнике тепла Джоуля - Ленца. При наличии в контуре источника тока в тепло преобразуется энергия источника. В опытах Фарадея источник тока отсутствует. Каково же тогда происхождение тепловой энергии? Согласно закону сохранения энергия ниоткуда не возникает и никуда не исчезает, она может лишь превращаться из одного вида в другой. Логично предположить, что работа вихревого электрического поля при перемещении зарядов вдоль замкнутого контура не равна нулю. **Вихревое электрическое поле не потенциально.**

Силовой характеристикой вихревого электрического поля является вектор напряженности $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$. В отличие от электростатического поля, силовые линии вихревого электрического поля замкнуты, они охватывают магнитные линии меняющегося магнитного поля, порождающего это электрическое поле. Замкнутость линий является отражением того факта, что источником вихревого электрического поля являются не заряды, а меняющееся магнитное поле. Направление силовых линий зависит от характера изменения магнитного поля (рисунок 1.10).

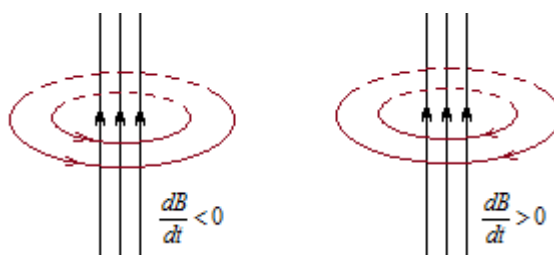


Рисунок 1.10

Энергетическая характеристика вихревого электрического поля – ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = \frac{A_{\text{вихр.поля}}}{q}$ - величина, численно равная работе поля по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура.

Силовая и энергетическая характеристики поля связаны друг с другом.

Разобьем замкнутый контур на малые элементы $d\vec{S}$. Элементарная работа по перемещению заряда на этом участке равна $\delta A_{\text{вихр.поля}} = \vec{F}_{\text{эл}} \cdot d\vec{S} = q\vec{E} \cdot d\vec{S} = qE_S \cdot dS$.

Работу поля по перемещению заряда вдоль всего контура найдем, суммируя элементарные работы вдоль всех участков контура

$$A_{\text{вихр.поля}} = \oint_L \delta A_{\text{вихр.поля}} = \oint_L qE_S \cdot dS = q \oint_L E_S \cdot dS. \text{ По определению ЭДС индукции}$$

равна $\mathcal{E}_i = \frac{A_{\text{вихр.поля}}}{q}$. После подстановки значения работы, получаем

$$\mathcal{E}_i = \oint_L E_S \cdot dS. \text{ ЭДС индукции равна циркуляции вектора напряженности вих-$$

ревого электрического поля.

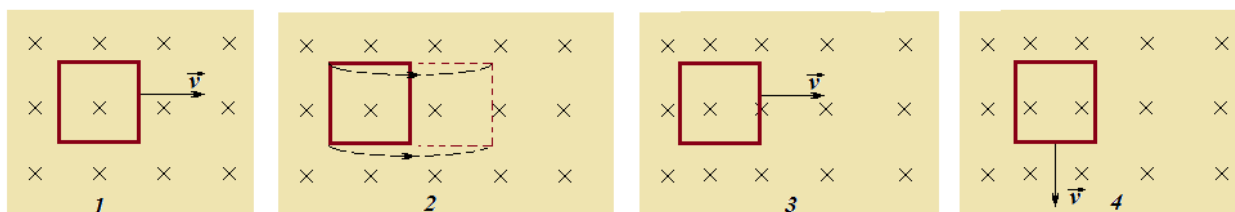
Подведем итоги

Природа ЭДС индукции (или сторонних сил, вызывающих появление индукционного тока) двойственная:

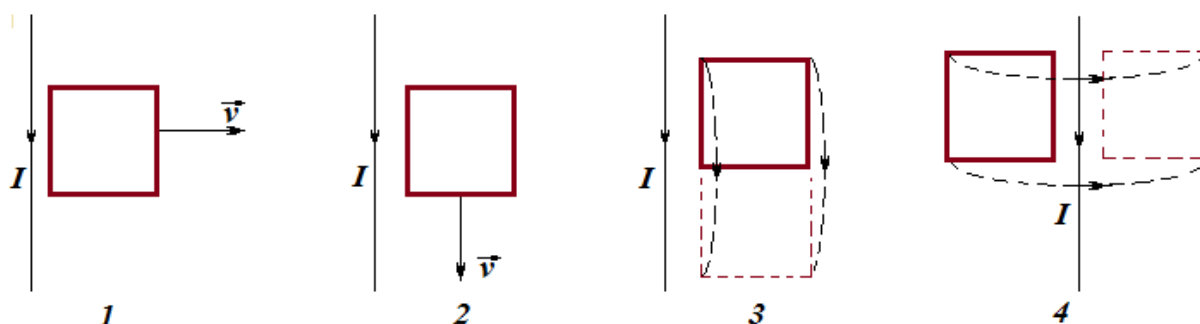
- 1 действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике;
- 2 появление вихревого электрического поля при изменении магнитного поля.

Тест «Возникновение индукционного тока»

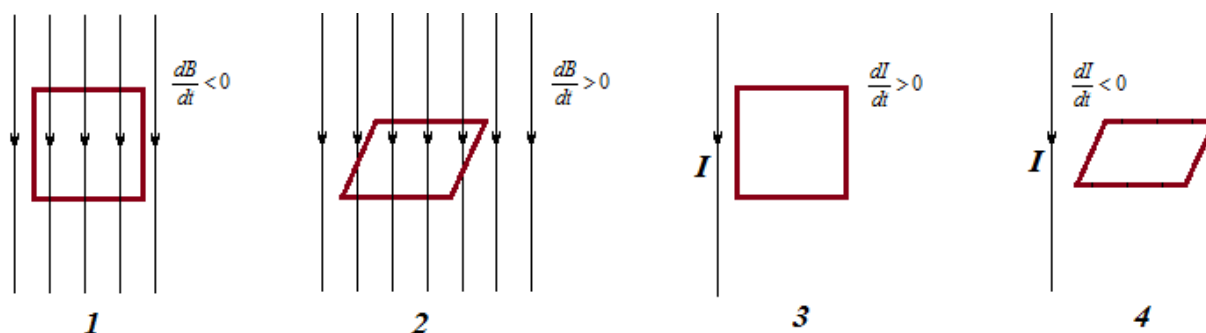
1 В каких случаях в движущейся рамке будет возникать индукционный ток?



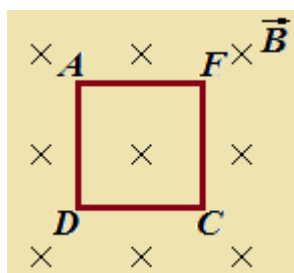
2 В каких случаях в движущейся рамке будет возникать индукционный ток?



3 В каком случае в рамке возникает индукционный ток?



4 Как нужно двигать рамку, чтобы в ней возник индукционный ток?



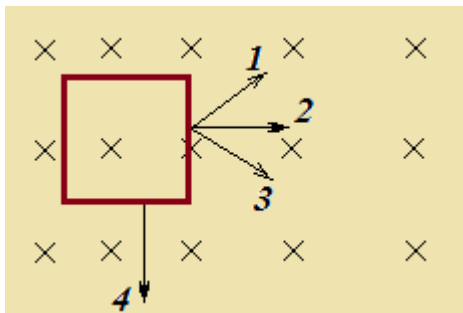
А) равномерно вправо;

Б) ускоренно вниз;

В) равномерно он нас, в плоскость рисунка;

Г) поворачивать вокруг ребра AD.

5 В каком направлении необходимо двигать рамку, чтобы в ней возник индукционный ток?



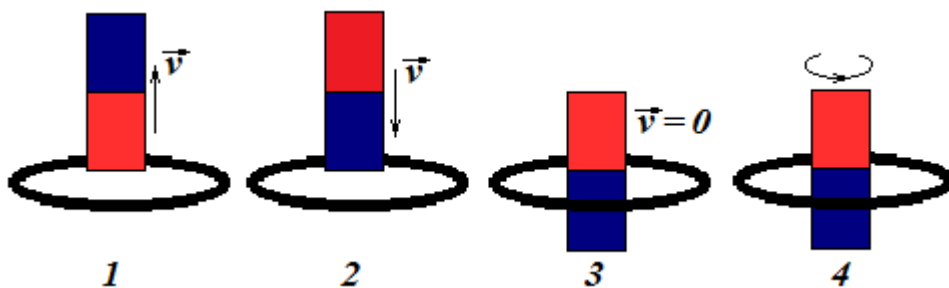
А) 1 и 3;

Б) 1, 2 и 3;

В) во всех указанных направлениях;

Г) ни в одном из указанных направлений.

6 При каком движении магнита в проволочном витке возникнет индукционный ток?



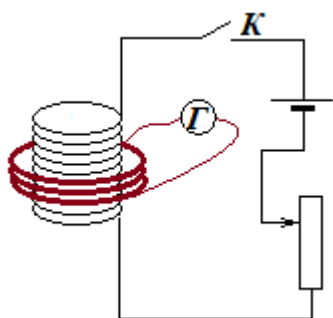
А) 1 и 2

Б) 1, 2 и 4

В) только 4

Г) 1, 2, 3, 4

7 Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока, малой катушки, реостата и ключа. Малая катушка вставлена в большую катушку, замкнутую на гальванометр. В каком случае гальванометр покажет наличие тока в большой катушке?



1 Замыкают ключ К;

2 При замкнутом ключе К в малую катушку вводят железный сердечник;

3 При замкнутом ключе К ползунок реостата перемещают вниз;

4 Проходит большое время после замыкания ключа.

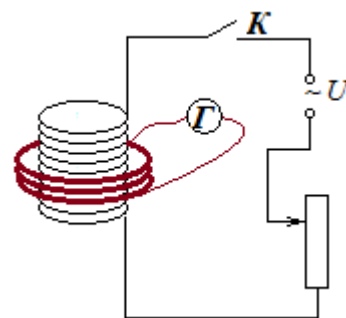
А) 1;

Б) 1 и 2;

В) 1, 2, 3;

Г) во всех случаях.

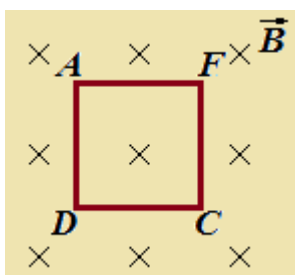
8 Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных источника тока, малой катушки, реостата и ключа. Малая катушка вставлена в большую катушку, замкнутую на гальванометр. В каком случае гальванометр покажет наличие тока в большой катушке?



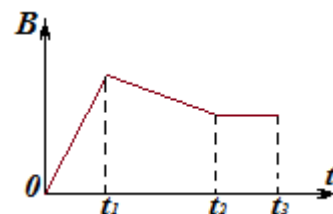
- 1 Замыкают ключ К;
- 2 При замкнутом ключе К в малую катушку вводят железный сердечник;
- 3 При замкнутом ключе К ползунок реостата перемещают вниз;
- 4 Проходит большое время после замыкания ключа.

А) 1; Б) 1 и 2; В) 1, 2, 3; Г) во всех случаях.

9 Проволочная рамка находится в однородном магнитном поле. Индукцию магнитного поля меняют так, как показано на графике. В какие промежутки времени по рамке течет индукционный ток?

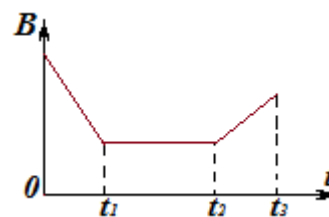
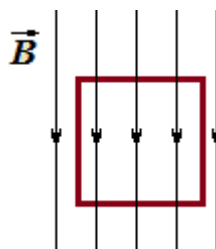


А) $(0; t_1)$; Б) $(0; t_2)$; В) $(0; t_3)$;



Г) Индукционный ток в рамке не возникает.

10 Проволочная рамка находится в однородном магнитном поле. Индукцию магнитного поля меняют так, как показано на графике. В какие промежутки времени по рамке течет индукционный ток?



А) $(0; t_1)$; Б) $(0; t_1)$ и $(t_2; t_3)$;

В) $(0; t_3)$; Г) Индукционный ток в рамке не возникает.

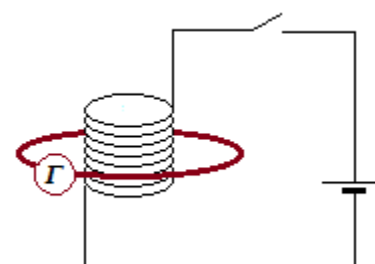
11 Какова природа ЭДС индукции, возникающей в прямоугольной рамке, вращающейся в магнитном поле?

1 ...возникновение вихревого электрического поля при изменении магнитного поля.

2 ... действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике.

А) только 1; Б) только 2; В) ни 1 и ни 2 ; Г) и 1, и 2.

12 При замыкании цепи гальванометр фиксирует ток в проволочном витке, одетом на катушку. Какова природа ЭДС индукции, возникающей в проволочном витке?



1. ...возникновение вихревого электрического поля при изменении магнитного поля.

2. ... действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике.

А) только 1; Б) только 2;

В) ни 1 и ни 2; Г) и 1, и 2.

§4 Закон электромагнитной индукции (закон Фарадея)

В опытах Фарадея сила индукционного тока зависит от скорости относительного движения магнита и катушки, следовательно, от скорости изменения магнитного потока, пронизывающего катушку. При увеличении скорости движения магнита величина тока увеличивается.

На основании опытов можно утверждать, что сила индукционного тока прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока

$$I \propto \frac{d\Phi}{dt}.$$

Согласно закону Ома сила тока в замкнутой цепи прямо пропорциональна ЭДС в цепи $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Поскольку сопротивление не зависит от магнитного потока, пронизывающего контур, от скорости изменения магнитного потока зависит ЭДС индукции $\mathcal{E}_i \propto \frac{d\Phi}{dt}$.

Для того чтобы поставить знак равенства, нужно ввести коэффициент пропорциональности $\mathcal{E}_i = k \frac{d\Phi}{dt}$.

Численное значение коэффициента пропорциональности зависит от выбора системы единиц. Единицы SI подобраны так, что коэффициент пропорциональности между ЭДС индукции и скоростью изменения магнитного потока равен $k = -1$:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3)$$

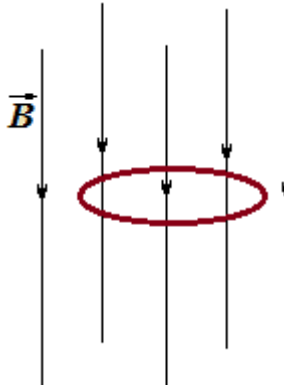
В SI единицей магнитного потока является **вебер** $[1\text{Вб}] = [\text{Тл} \cdot \text{м}^2]$ - это магнитный поток, при равномерном убывании которого до нуля в контуре возникает ЭДС индукции 1 В.

Выражение (3) является математической записью закона Фарадея: ЭДС индукции прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока.

Знак «минус» связан с направлением индукционного тока. Этот вопрос мы обсудим позже.

Закон Фарадея можно применять независимо от природы ЭДС индукции.

Пример 1 Контур в изменяющемся магнитном поле



Пусть проволочный контур находится в магнитном поле, индукция которого уменьшается по закону $B = 2t + t^2$ (Тл). Линии магнитной индукции перпендикулярны площади контура, а его площадь равна $S = 100 \text{ см}^2$.

Магнитный поток $\Phi = BS \cdot \cos 0 = BS$, пронизывающий контур, изменяется за счет изменения магнитной индукции \vec{B} . Согласно закону Фарадея в контуре возникает ЭДС индукции, равная

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} = -S \frac{dB}{dt} = -100 \cdot 10^{-4} \cdot (2t + t^2)' = -0,01(2 + 2t) \text{ (В)}$$

Природа ЭДС в этот случае – появление вихревого электрического поля при изменении магнитного поля.

Пример 2 ЭДС индукции в поступательно движущемся проводнике

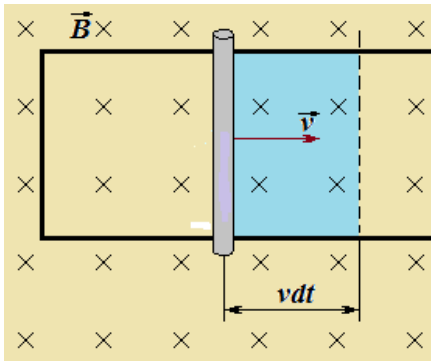
Прямолинейный проводник длины L , расположенный в однородном магнитном поле индукции \vec{B} перпендикулярно магнитным линиям, движется со скоростью \vec{v} по П - образной рамке. Вектор скорости перпендикулярен самому проводнику и магнитным линиям. Определим величину ЭДС индукции, возникающей в контуре, образованном рамкой и движущимся стержнем.

Найдем численное значение ЭДС, применяя закон Фарадея. Этот способ формальный, он не акцентирует внимание на природе ЭДС индукции, однако чаще всего именно этот способ наиболее удобен для расчета ЭДС.

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

В законе Фарадея $d\Phi = d(BS)$ – это изменение магнитного потока, пронизывающего контур. Поскольку магнитное поле постоянно, изменение магнитного потока происходит за счет изменения площади контура.

$$d\Phi = d(BS) = B \cdot dS.$$

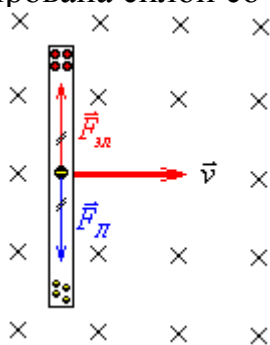


За малый интервал времени dt стержень совершает перемещение $v \cdot dt$. Изменение площади контура равно $dS = L \cdot v \cdot dt$. Изменение магнитного потока $d\Phi = B \cdot Lvdt$. Тогда модуль ЭДС индукции в контуре равен

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{B \cdot Lvdt}{dt} = BvL. \quad (4)$$

ЭДС индукции возникает в движущемся стержне и в том случае, когда замкнутого контура, образуемого П-образной рамкой нет, а стержень свободно движется в магнитном поле. Конечно, никакого индукционного тока в отсутствие замкнутого контура нет. Однако между концами движущегося проводника возникает разность потенциалов за счет смещения электронов под действием силы Лоренца.

Заряды на концах проводящего стержня создают электрическое поле. Перетекание электронов прекращается, когда сила Лоренца будет скомпенсирована силой со стороны электрического поля.



$$\vec{F}_L + \vec{F}_{эл} = 0$$

$$qBv = qE.$$

Электрическое поле внутри проводника однородное, а в однородном поле напряженность и разность потенциалов связаны соотношением $\varphi_1 - \varphi_2 = E \cdot L$. Тогда

$$qBv = q \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{L}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = BvL.$$

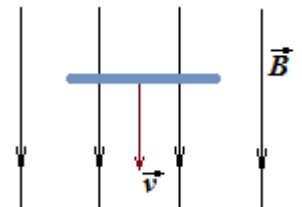
Нетрудно видеть, что мы получили тот же результат, что и на основании закона Фарадея.

Анализ результата

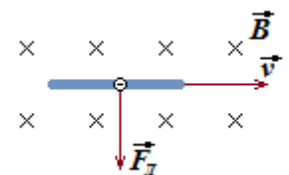
1 На практике при расчете модуля ЭДС индукции в движущемся проводнике чаще всего используют закон Фарадея. Поскольку в случае движения незамкнутого проводника никакого замкнутого контура нет, под dS следует понимать *площадь, заемаемую проводником за время dt* . Знание природы ЭДС индукции в этом случае необходимо для определения полярности ЭДС и, следовательно, направления индукционного тока.

2 Выражение $|\mathcal{E}_i| = BvL$ - это *мгновенное значение ЭДС индукции!* Неважно, как двигается проводник – равномерно или ускоренно. Неважно, происходит движение проводника в однородном магнитном поле или в изменяющемся. В любом случае за малое время dt изменением скорости проводника можно пренебречь и перемещение проводника рассчитывать как при равномерном движении.

3 Если проводник движется вдоль магнитных линий, то сила Лоренца на свободные заряды в нем не действует, следовательно, в таком проводнике ЭДС индукции не возникает.

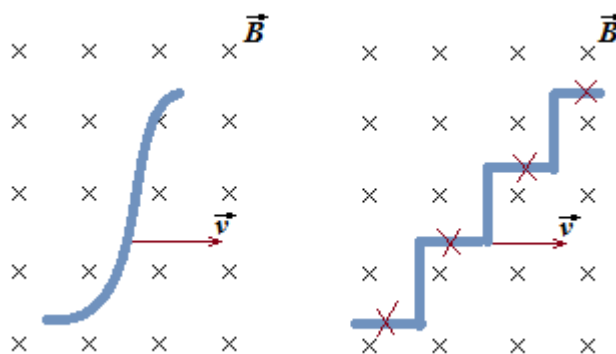


Если направление скорости движения проводника совпадает с самим проводником, то сила Лоренца на заряды в проводнике действует, но смещаться под действием этой силы зарядам некуда. В этом случае ЭДС индукции в проводнике тоже не возникает.

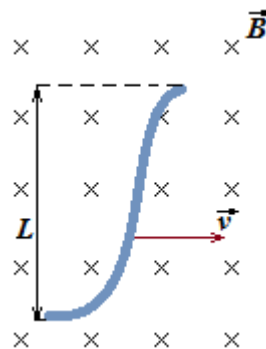


Таким образом, ЭДС индукции возникает в проводнике только тогда, когда он движется перпендикулярно магнитным линиям и самому себе. В выражении $|\mathcal{E}_i| = BvL$ v - это составляющая скорости, перпендикулярная магнитным линиям и самому проводнику.

4 Пусть проводник лежит в плоскости, перпендикулярной магнитным линиям и имеет неправильную форму. Проводник можно представить в виде ломаной с бесконечно короткими звеньями, одни из которых располагаются перпендикулярно скорости движения проводника, другие - параллельно.



В участках проводника, параллельных вектору скорости, ЭДС индукции не возникает. Таким образом, в выражении $|\mathcal{E}_i| = BvL$ под L следует понимать длину отрезка, заключенного между проекциями концов проводника на направление, перпендикулярное магнитным линиям и вектору скорости проводника.



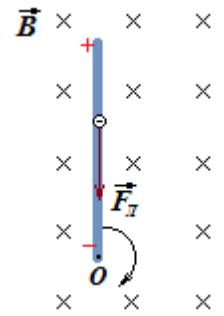
Пример 3 ЭДС индукции в проводнике, вращающемся в магнитном поле

Прямолинейный проводник длины L , расположенный в однородном магнитном поле индукции \vec{B} перпендикулярно магнитным линиям, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной магнитным

линиям, проходящей через один из концов проводник. Определим величину ЭДС индукции, возникающей в проводнике.

Природа ЭДС индукции в данном случае - действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. Полярность ЭДС можно определить, используя правило левой руки.

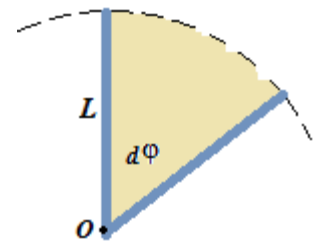
Воспользоваться полученным ранее выражением для расчета ЭДС индукции $|\mathcal{E}_i| = BvL$ нельзя, ибо проводник вращается, а не двигается поступательно.



$$\text{Воспользуемся законом Фарадея } \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

В законе Фарадея $d\Phi = d(BS) = B \cdot dS$ - изменение магнитного потока, пронизывающего контур. В случае вращения прямого проводника никакого замкнутого контура нет, под dS следует понимать **площадь, заметаемую проводником за время dt** .

За время dt проводник поворачивается на угол $d\varphi = \omega \cdot dt$. Заметаемая проводником фигура - сектор радиусом L .



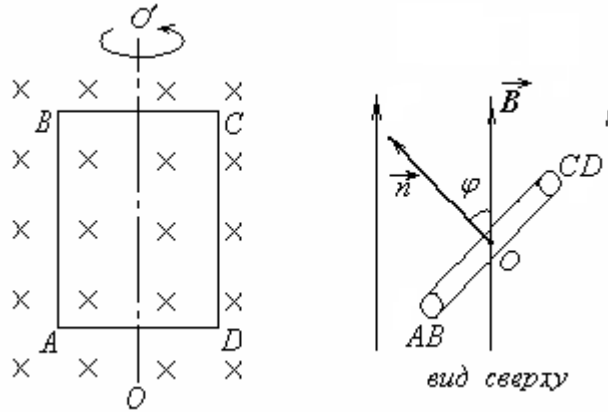
$$\text{Площадь сектора равна } dS = \frac{\pi L^2}{2\pi} \cdot d\varphi = \frac{L^2}{2} \cdot \omega \cdot dt.$$

$$\text{Модуль ЭДС индукции равен } |\mathcal{E}_i| = \frac{B \cdot L^2 \cdot \omega \cdot dt}{2dt} = \frac{BL^2\omega}{2}.$$

Вращение проводника в магнитном поле не обязательно должно происходить с постоянной угловой скоростью. Выражение $|\mathcal{E}_i| = \frac{BL^2\omega}{2}$ позволяет рассчитать мгновенное значение ЭДС, тогда под ω следует понимать мгновенное значение угловой скорости.

Пример 4 ЭДС индукции в рамке, вращающейся в магнитном поле

В однородном магнитном поле индукции \vec{B} находится рамка площадью S . В начальный момент магнитные линии перпендикулярны плоскости рамки. Рамку начинают вращать с постоянной угловой скоростью ω .



Магнитный поток $\Phi = BS \cdot \cos \alpha = BS \cdot \cos(\omega t)$, пронизывающий контур, изменяется за счет изменения угла между вектором магнитной индукции \vec{B} и нормалью к контуру. При изменении магнитного потока в контуре возникает ЭДС индукции. Согласно закону Фарадея

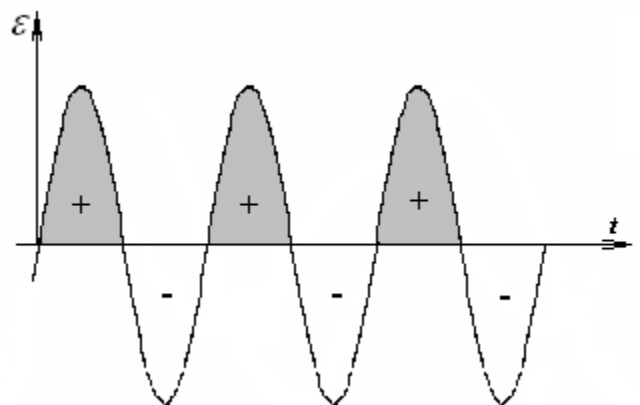
$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -(BS \cdot \cos \alpha)' = (BS \cdot \cos(\omega t))' = BS\omega \cdot \sin(\omega t).$$

Рамка, вращающаяся в магнитном поле, стала источником переменной (синусоидальной) ЭДС.

Покажем, что частота этой переменной ЭДС совпадает с частотой вращения рамки.

Угловая скорость вращения рамки $\omega = 2\pi n$, где n – частота вращения.

В выражении для ЭДС ω – это циклическая частота гармонической функции, она связана с обычной частотой $\omega = 2\pi\nu$.



$$2\pi n = 2\pi\nu$$

$$n = \nu.$$

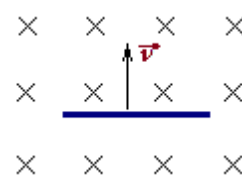
Изменение знака ЭДС означает изменение ее полярности через каждые полпериода (пол-оборота) рамки.

Численное значение ЭДС тоже периодически изменяется. Максимальное значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_{i_{\max}} = BS\omega$ зависит от величины индукции магнитного поля, площади рамки и скорости ее вращения.

Индукция магнитного поля, пронизывающего рамку, не изменяется, следовательно, вихревое электрическое поле в случае вращения рамки в магнитном поле не возникает. Природа ЭДС индукции в этом случае – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике.

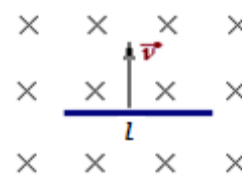
Тест «Закон Фарадея»

1 Металлический стержень движется в однородном магнитном поле так, как показано на рисунке. Какие заряды образуются на торцах стержня?



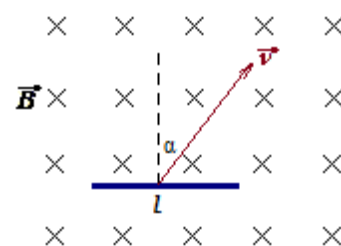
- А) оба конца положительные
- Б) оба конца отрицательные
- В) левый конец положительный, правый – отрицательный
- Г) левый конец отрицательный, правый – положительный

2 Чему равна ЭДС индукции, возникающая в стержне, движущемся в однородном магнитном поле с постоянной скоростью v ?

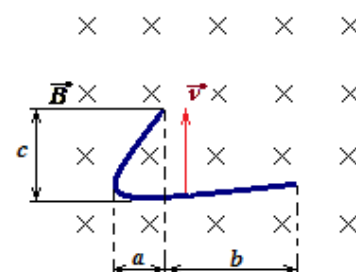


- А) IBl ; Б) IBv ; В) Bvl ; Г) Ivl .

3 Чему равна ЭДС индукции, возникающая в стержне, движущемся в однородном магнитном поле с постоянной скоростью v ?



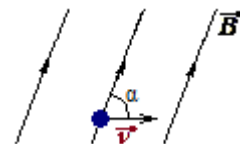
- А) IBl ; Б) IBv ;
- В) $Bvl \cdot \sin \alpha$; Г) $Bvl \cdot \cos \alpha$.



4 Чему равна ЭДС индукции, возникающая в куске проволоки длины S , движущемся в однородном магнитном поле с постоянной скоростью v ?

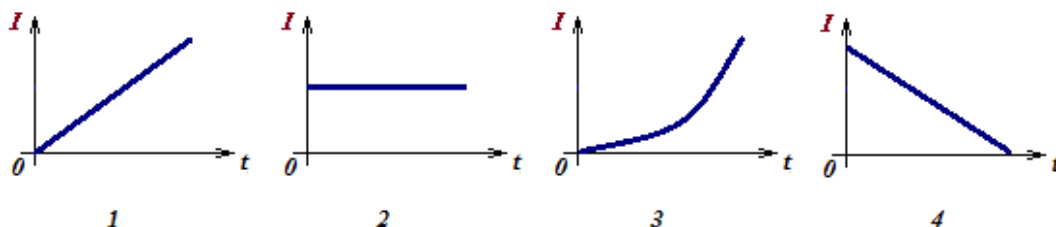
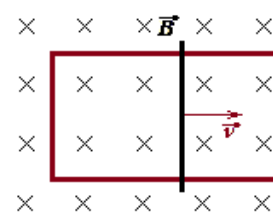
- А) BvS ; Б) $Bv(a+b)$;
 В) Bvb ; Г) Bvc .

5 Чему равна ЭДС индукции, возникающая в стержне длины l , движущемся в однородном магнитном поле с постоянной скоростью v (стержень перпендикулярен плоскости рисунка)?



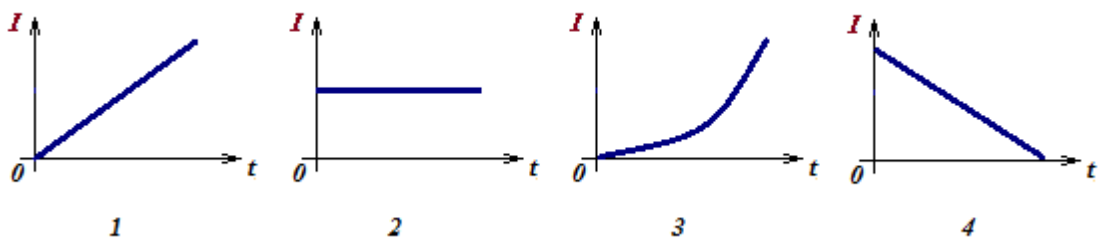
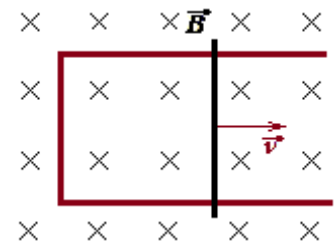
- А) IBl ; Б) Bvl ; В) $Bvl \cdot \sin \alpha$; Г) $Bvl \cdot \cos \alpha$.

6 Подвижную металлическую перемычку сопротивлением R двигают равномерно по короткозамкнутым проводящим рельсам, расположенным в однородном магнитном поле. На каком графике правильно показана зависимость индукционного тока, возникающего в замкнутом контуре, от времени? Сопротивлением рельсов пренебречь.



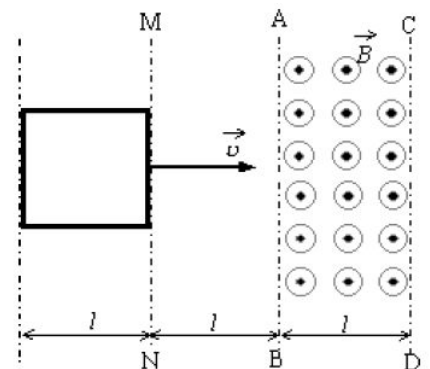
- А) 1 ; Б) 2;
 В) 3; Г) 4.

7 Подвижную металлическую перемычку сопротивлением R двигают равноускоренно из состояния покоя по короткозамкнутым проводящим рельсам, расположенным в однородном магнитном поле. На каком графике правильно показана зависимость индукционного тока, возникающего в замкнутом контуре, от времени, если сопротивление рельсов можно пренебречь?



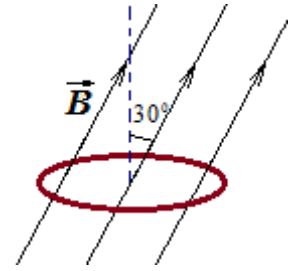
- А) 1 ; Б) 2 ; В) 3 ; Г) 4.

8 В некоторой области пространства, ограниченной плоскостями AB и CD , создано однородное магнитное поле. Металлическая квадратная рамка движется с постоянной скоростью, направленной вдоль плоскости рамки и перпендикулярно линиям индукции поля. На каком из графиков правильно показана зависимость от времени ЭДС индукции в рамке, если в начальный момент времени рамка начинает пересекать плоскость MN , а в момент времени t_0 касается передней стороной линии CD ?



9 В опыте по наблюдению ЭДС электромагнитной индукции квадратная рамка из тонкого провода со стороной квадрата b находится в однород-

12 Индукция магнитного поля, пронизывающего проволочный контур, убывает по закону $B = 5 - 1,73t$. Площадь контура равна 100 см^2 . Чему равна ЭДС индукции, возникающая в контуре?

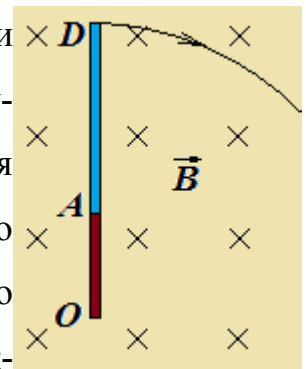


- А) 1,73В ; Б) 8,65 мВ; В) 17,3 мВ; Г) 30 мВ.

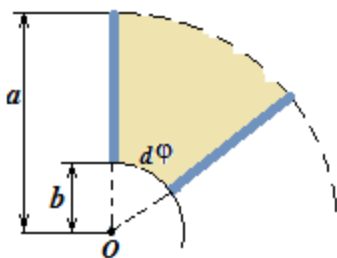
§5 Примеры решения задач

Задача 1

Стержень OA состоит из непроводящей части OA и проводящей части AD . Стержень расположен перпендикулярно магнитным линиям однородного магнитного поля индукции B и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку O , параллельную магнитным линиям. Чему равна разность потенциалов между точками A и D . $OD = a$, $OA = b$.



Причина возникновения разности потенциалов между точками A и D – смещение электронов под действием силы Лоренца. Для нахождения ЭДС индукции (разности потенциалов между точками A и D). Воспользуемся законом Фарадея $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.



В законе Фарадея $d\Phi = d(BS) = B \cdot dS$ – изменение магнитного потока, пронизывающего контур. Под dS следует понимать площадь, заметаемую проводником за время dt .

$$dS = \frac{\pi(a^2 - b^2)}{2\pi} \cdot d\varphi = \frac{(a^2 - b^2)}{2} \cdot \omega \cdot dt.$$

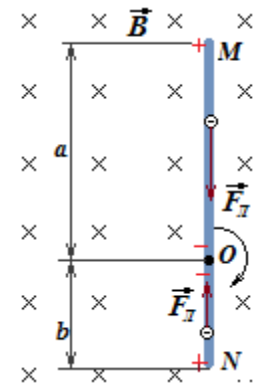
ЭДС индукции, возникающая в проводнике, равна

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{BdS}{dt} = \frac{B\omega(a^2 - b^2)}{2}.$$

Если вращение проводника происходит относительно точки, принадлежащей проводнику, то, нетрудно видеть, что задача сводится к базовой.

Стержень можно представить как комбинацию двух стержней, каждый из которых вращается вокруг своего конца.

ЭДС индукции, возникающие в участках OM и ON , имеют противоположные направления.



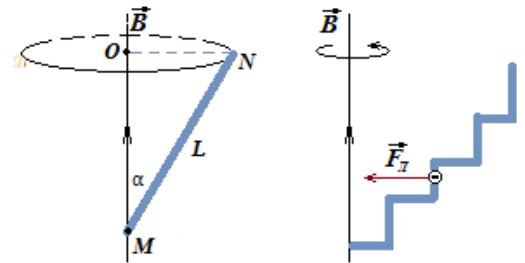
Следовательно, ЭДС индукции в стержне MN , равна

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{iOM} - \mathcal{E}_{iON} = \frac{B\omega a^2}{2} - \frac{B\omega b^2}{2} = \frac{B\omega(a^2 - b^2)}{2}.$$

Если стержень расположен под углом к магнитной линии и вращается вокруг нее, то можно представить прямой проводник в виде ломаной с бесконечно малыми звеньями, одни из них располагаются перпендикулярно магнитным линиям, другие параллельно.

Во всех участках ломаной на свободные электроны в проводнике действует сила Лоренца, однако, в участках, расположенных параллельно магнитным линиям, электронам некуда смещаться под действием этой силы.

Следовательно, в участках, параллельных магнитным линиям, ЭДС индукции возникать не будет. ЭДС индукции возникает только в тех участках ломаной, которые перпендикулярны магнитным линиям.



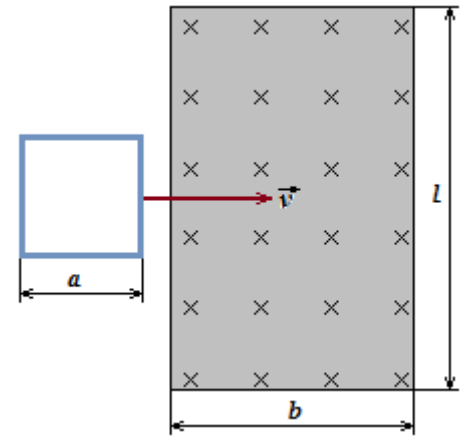
Тогда ЭДС в стержне MN такая же, как если бы вращался стержень

$$ON: \mathcal{E}_i = \frac{1}{2} B(L \cdot \sin \alpha)^2 \omega.$$

Задача 2

Рамку двигают в магнитном поле (МФТИ, 1993; ЕГЭ, 2006)

Квадратную проволочную рамку с длиной стороны a и сопротивлением R протягивают с постоянной скоростью v через зазор электромагнита. Магнитное поле в зазоре однородно и его индукция равна B . Плоскость рамки перпендикулярна \vec{B} . Пренебрегая краевыми эффектами, определить, какое количество теплоты выделится в рамке, если сторона рамки a меньше продольного размера зазора b , а поперечный размер $l > a$.

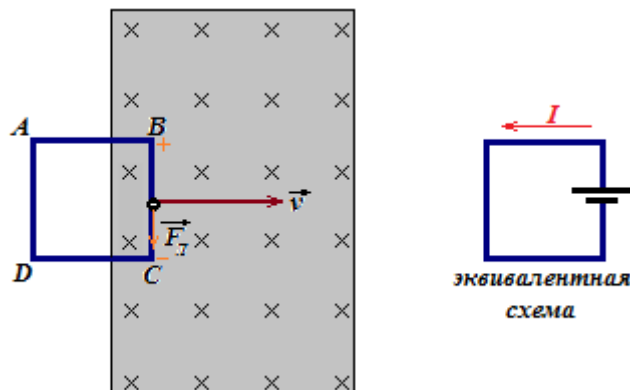


Решение

1 На входе и выходе из магнитного поля в рамке будет возникать индукционный ток, поскольку пронизывающий рамку магнитный поток будет изменяться.

Природа ЭДС индукции, возникающей в рамке – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике.

Для решения задачи не требуется определять направление индукционного тока, однако, это полезно сделать в качестве закрепления.



2 На входе в магнитное поле ЭДС индукции возникает в стороне BC. Для поступательно движущегося в магнитном поле проводника ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_i = Bva.$$

Поскольку рамка движется равномерно, ЭДС индукции будет постоянной, по рамке потечет постоянный ток.

3 Силу тока находим по закону Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Bva}{R}.$$

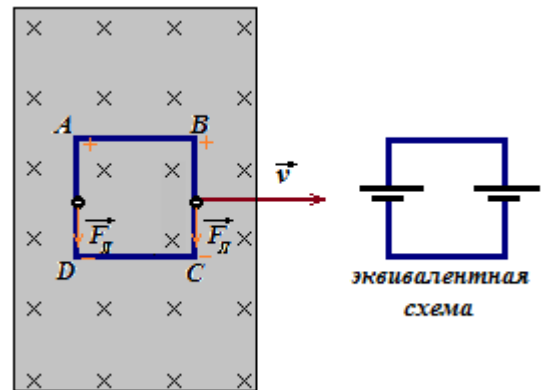
4 Количество теплоты, выделившейся в рамке на входе в магнитное поле находим по закону Джоуля – Ленца:

$$Q_1 = I^2 R t = \left(\frac{Bva}{R} \right)^2 R t = \frac{B^2 v^2 a^2}{R^2} R \cdot \frac{a}{v} = \frac{B^2 va^3}{R}.$$

5 Когда рамка целиком окажется в однородном магнитном поле, индукционный ток прекратится. Этот факт опять-таки можно и нужно объяснять двумя способами.

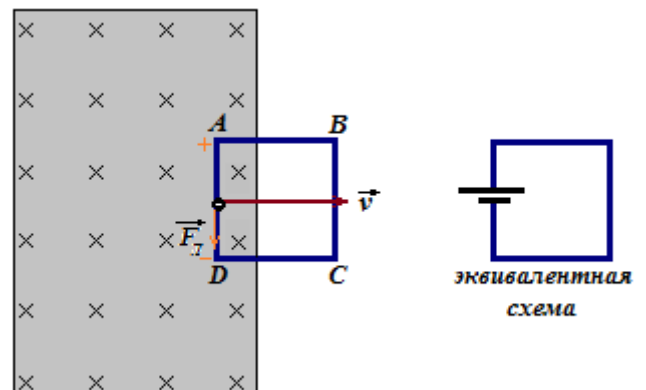
Во-первых, магнитный поток при движении рамки в поле будет оставаться неизменным, в этом случае явление электромагнитной индукции не наблюдается.

С другой стороны, в сторонах AD и BC движущейся рамки будут возникать ЭДС индукции, природа которых – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. Нетрудно видеть, что полярность и численное значение



ЭДС в сторонах AD и BC будут одинаковыми. Поэтому суммарная ЭДС в контуре будет равна нулю.

6 На выходе из магнитного поля по рамке опять потечет индукционный ток, поскольку магнитный поток, пронизывающий контур, будет уменьшаться. Однако, теперь ЭДС индукции будет возникать в стороне AD .



Очевидно, что количество теплоты, выделившееся в рамке на выходе из поля, будет таким же, как на входе.

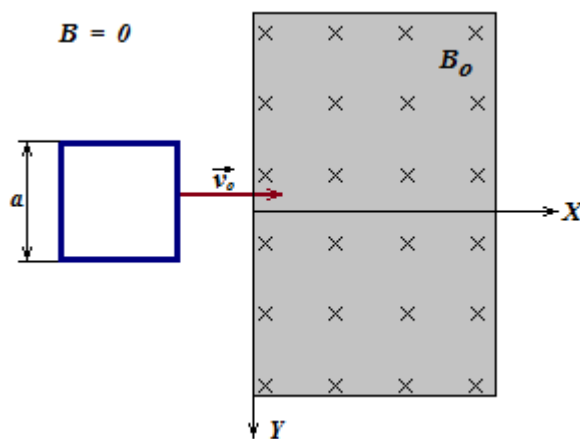
Общее количество теплоты, выделившееся в рамке при прохождении зазора между полюсами магнита, будет равно

$$Q = 2Q_1 = \frac{B^2 \nu a^3}{R}.$$

Задача 3

Рамка движется в магнитном поле (МФТИ, 1997)

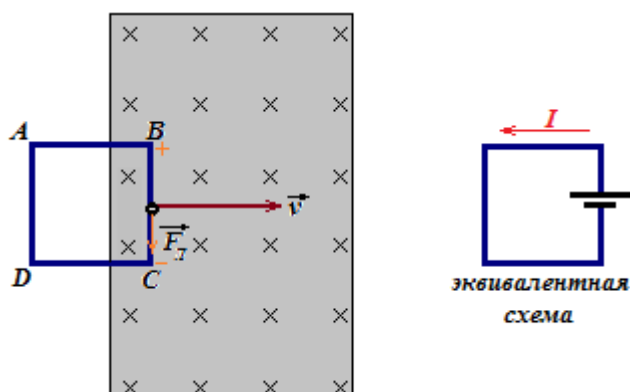
Проволочный контур в виде квадрата со стороной a , массой M и общим сопротивлением R расположен на гладкой горизонтальной поверхности вблизи от границы области однородного магнитного поля ($x \geq 0$) с индукцией B_0 , перпендикулярной плоскости контура. Контур сообщают скорость ν_0 , направленную перпендикулярно границе магнитного поля (ось OY). Определите максимальную величину ускорения контура при его дальнейшем движении, включая область магнитного поля. Самоиндукцией контура пренебречь.



Решение

1 Очевидно, что вне магнитного поля рамка движется равномерно.

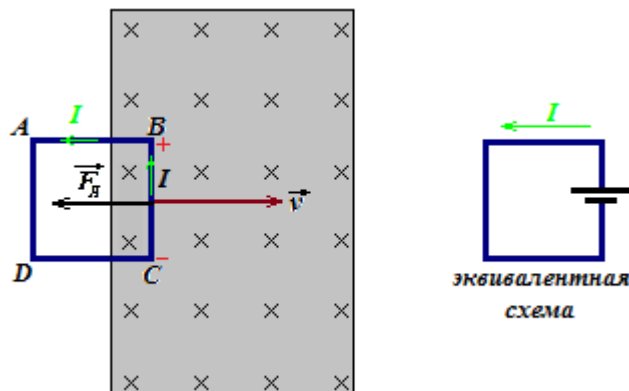
2 На входе в магнитное поле в рамке возникнет индукционный ток, поскольку будет увеличиваться магнитный поток, пронизывающий рамку. Природа ЭДС индукции - действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике.



На входе в магнитное поле ЭДС индукции возникает в стороне BC . Для поступательно движущегося в магнитном поле проводника ЭДС индукции равна $\varepsilon_i = B_0 \nu a$.

Величина индукционного тока $I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{B_0 \nu a}{R}$.

3 На ток в магнитном поле действует сила Ампера. Определяем ее направление по правилу левой руки.



Видим, что сила Ампера направлена против движения, она тормозит рамку. Численное значение силы Ампера

$$F_A = IB_0 a = \frac{B_0 \nu a}{R} \cdot B_0 a = \frac{B_0^2 a^2 \nu}{R}.$$

Магнитное поле однородно, следовательно, $B_0 = const$, сопротивление и размеры рамки тоже неизменны. Таким образом, численное значение силы Ампера зависит только от скорости рамки. Поскольку рамка тормозит, сила Ампера по мере вхождения рамки в поле уменьшается.

Сила Ампера была максимальна в тот момент, когда скорость рамки была максимальна, то есть в момент пересечения стороной BC границы магнитного поля.

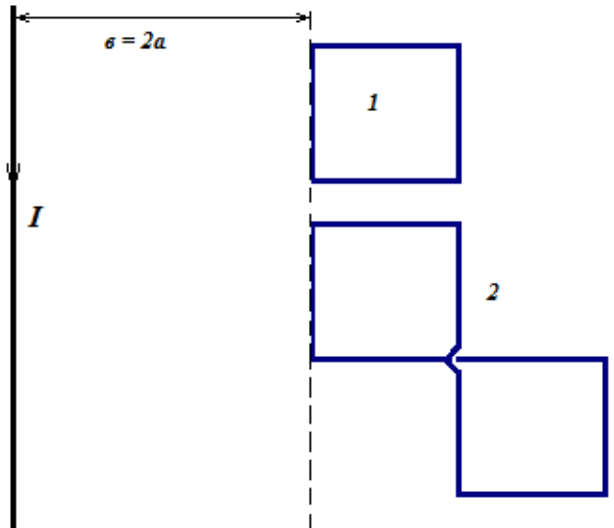
$$F_{A\max} = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{R}.$$

Согласно второму закону Ньютона ускорение прямо пропорционально приложенной силе, следовательно, $a_{\max} = \frac{B_0^2 a^2 v_0}{RM}$.

Задача 4

Проволочные контуры двигают в неоднородном магнитном поле (МФТИ, 1994)

Два проволочных контура, изготовленных из одного куска проволоки, движутся с одинаковыми скоростями к длинному прямолинейному проводу с постоянным током. Контур 1 является квадратом со стороной a , контур 2 в виде восьмерки состоит из двух квадратов, стороны которых равны сторонам квадрата 1. Когда они оказались на расстоянии $b = 2a$ от провода, ток в контуре 1 был равен I_1 . Чему был равен в этот момент ток в контуре 2?

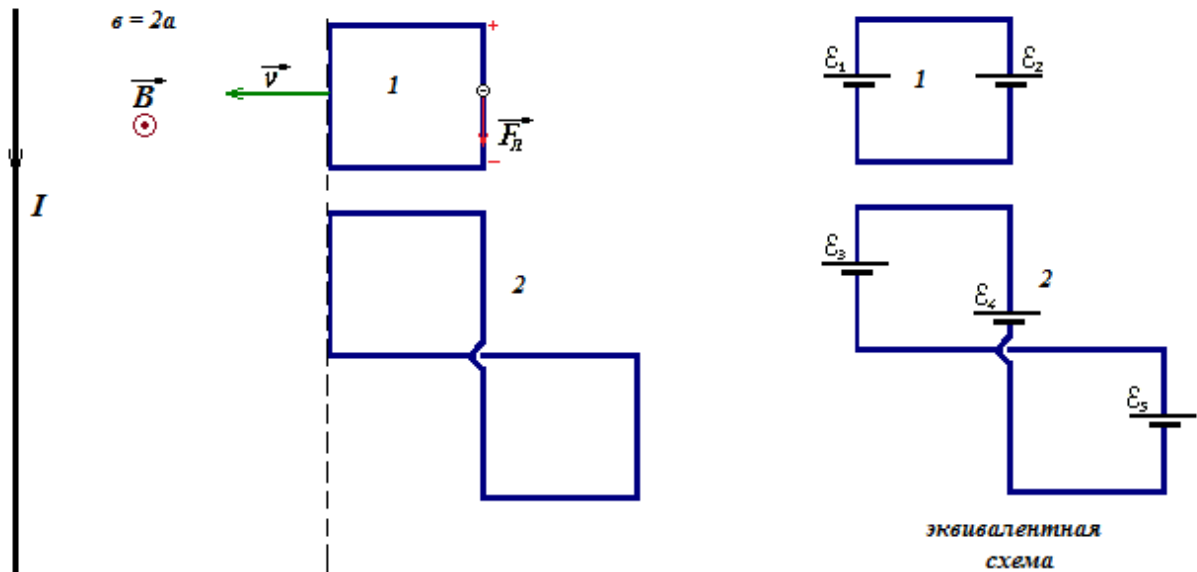


Провод и оба контура расположены в одной плоскости.

Решение

1 При приближении к проводнику с током контуры попадают в область более сильного магнитного поля, следовательно, магнитный поток, пронизывающий каждый контур, увеличивается. В контурах возникает индукционный ток.

Природа ЭДС индукции в каждом контуре – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. ЭДС возникает в тех сторонах контуров, которые в процессе движения пересекают магнитные линии. Полярность ЭДС определяем по правилу левой руки.



2 Численное значение ЭДС индукции в проводнике, движущемся по-
ступательно в магнитном поле $\mathcal{E}_i = Bv l$.

$$\mathcal{E}_{i1} = B_1 v a = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} v a = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} v a = \frac{\mu_0 I v}{4\pi}$$

$$\mathcal{E}_{i2} = B_2 v a = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b+a)} v a = \frac{\mu_0 I}{6\pi a} v a = \frac{\mu_0 I v}{6\pi}$$

$$\mathcal{E}_{i3} = B_1 v a = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} v a = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} v a = \frac{\mu_0 I v}{4\pi}$$

$$\mathcal{E}_{i4} = B_2 v a = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b+a)} v \cdot 2a = \frac{\mu_0 I}{6\pi a} v \cdot 2a = \frac{\mu_0 I v}{3\pi}$$

$$\mathcal{E}_{i5} = B_3 v a = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b+2a)} v a = \frac{\mu_0 I}{8\pi a} v a = \frac{\mu_0 I v}{8\pi}.$$

Общая ЭДС индукции, возникающая в первом контуре, равна

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{i1} - \mathcal{E}_{i2} = \frac{\mu_0 I v}{4\pi} - \frac{\mu_0 I v}{6\pi} = \frac{\mu_0 I v}{12\pi}.$$

Общая ЭДС индукции, возникающая во втором контуре, равна

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{i3} - \mathcal{E}_{i4} + \mathcal{E}_{i5} = \frac{\mu_0 I v}{4\pi} - \frac{\mu_0 I v}{3\pi} + \frac{\mu_0 I v}{8\pi} = \frac{\mu_0 I v}{24\pi}.$$

3 Пусть сопротивление первого контура равно R сопротивление второго контура равно $2R$, поскольку он вдвое длиннее.

4 Сила тока в первом контуре равна $I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R} = \frac{\mu_0 I v}{12\pi R}$.

Сила тока во втором контуре равна $I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{2R} = \frac{\mu_0 I v}{48\pi R}$.

Нетрудно видеть, что $I_2 = \frac{1}{4} I_1$.

Задача 5

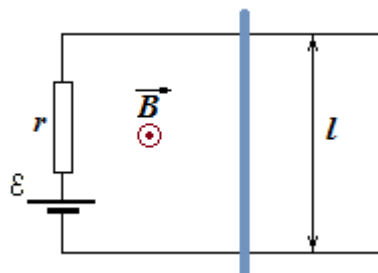
Движение проводящей перемычки по рельсам в магнитном поле (МФТИ, 2007)

По длинным параллельным горизонтальным проводящим рельсам, находящимся на расстоянии l друг от друга, может без трения скользить, не теряя электрического контакта и оставаясь перпендикулярной рельсам, проводящая перемычка (на рисунке изображен вид сверху). Рельсы соединены через резистор сопротивлением r и идеальную батарею с ЭДС \mathcal{E} . Сопротивлением остальных участков цепи можно пренебречь. Система находится в вертикальном постоянном однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярном плоскости рисунка. Если к перемычке приложить параллельную рельсам силу F то перемычка будет оставаться неподвижной, а при вдвое большей силе (в том же направлении) через некоторое время устанавливается равномерное движение перемычки со скоростью v .

1 Найдите величину силы F .

2 Найдите величину и направление скорости v .

Считайте заданными \mathcal{E} , r , B , l .

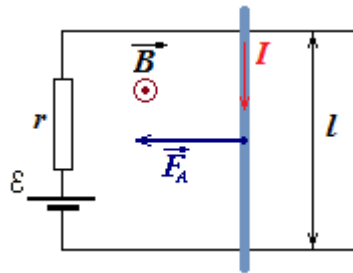


Решение

1 В первом случае перемычка покоится. Это означает, что ЭДС индукции в ней не возникает. Для контура, содержащего источник тока, резистор и перемычку, можно записать закон Ома для полной цепи

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r}$$

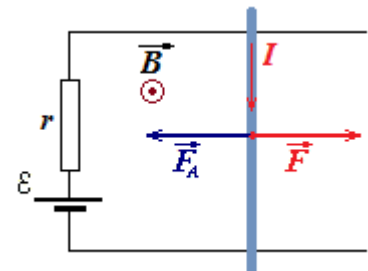
2 На перемычку с током в магнитном поле действует сила Ампера, ее направление можно определить по правилу левой руки.



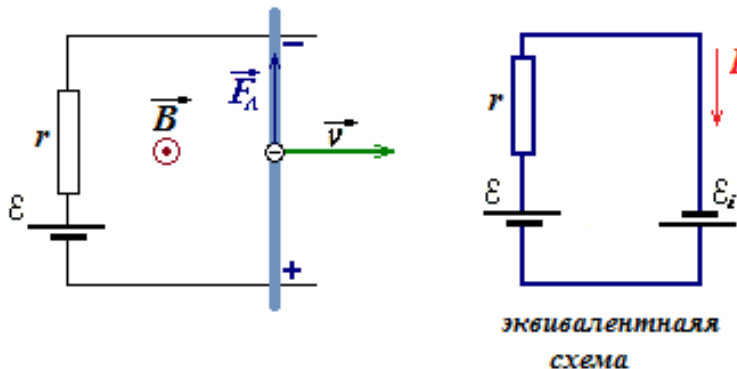
Численное значение силы Ампера $F_A = BI_1l = B \cdot \frac{\mathcal{E}}{r} \cdot l$.

3 Чтобы перемычка оставалась в покое, сила \vec{F} должна уравновешивать силу Ампера

$$F = F_A = B \cdot \frac{\mathcal{E}}{r} \cdot l$$



4 Под действием силы $2\vec{F}$ перемычка придет в движение вправо. В движущейся перемычке будет возникать ЭДС индукции, природа которой – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. Полярность ЭДС индукции определяем по правилу левой руки.



Модуль ЭДС индукции, возникающей в перемычке в установившемся режиме, равен $\mathcal{E}_i = Bvl$.

5 Ток в контуре находим по закону Ома для полной цепи

$$I_2 = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{r} = \frac{\mathcal{E} + Bvl}{r}.$$

6 На ток в перемычке действует сила Ампера $F_A = BI_2l = B \cdot \frac{\mathcal{E} + Bvl}{r} \cdot l$.

7 В установившемся режиме сила Ампера уравновешивается силой $2\vec{F}$.

$$B \cdot \frac{\mathcal{E} + Bvl}{r} \cdot l = 2F$$

Подставляем найденное ранее значение силы F

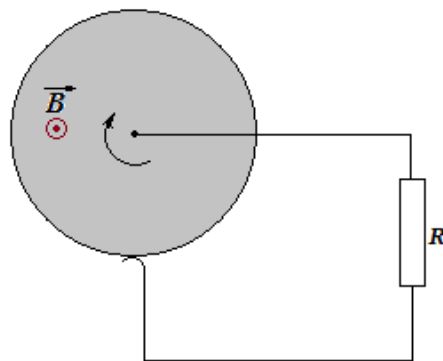
$$B \cdot \frac{\mathcal{E} + Bvl}{r} \cdot l = 2B \cdot \frac{\mathcal{E}}{r} \cdot l$$

$$v = \frac{\mathcal{E}}{Bl}.$$

Задача 6

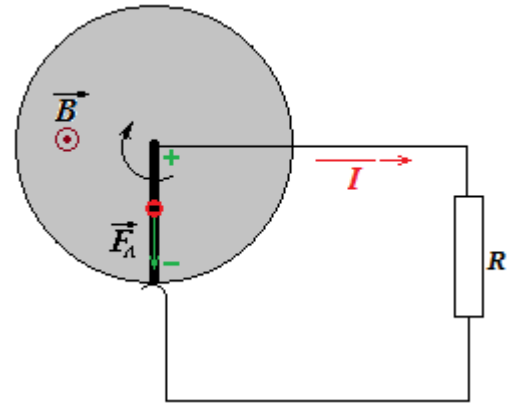
Вращение проводящего диска в однородном магнитном поле (ЕГЭ, 2006)

Проводящий диск вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле индукции B , перпендикулярном плоскости диска. Какая тепловая мощность выделяется в резисторе $R=1$ Ом, если радиус диска $r=0,05$ м, $\omega=2\pi \cdot 50$ рад/с, $B=1$ Тл?



Решение

1 Вращающийся диск можно представить как совокупность вращающихся стержней длины r . В каждом из стержней при вращении в магнитном поле возникает ЭДС индукции, природа которой – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. Центр диска и скользящий контакт постоянно замкнуты одним из таких стержней. По этой причине через резистор постоянно течет ток.



2 Модуль ЭДС индукции, возникающей во вращающемся стержне, найден в задаче 2 (не будем повторять вывод) $\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} Br^2 \omega$.

3 Сила тока в резисторе $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Br^2 \omega}{2R}$.

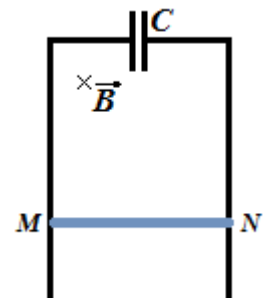
4 Тепловая мощность в резисторе

$$P = I^2 R = \left(\frac{Br^2 \omega}{2R} \right)^2 \cdot R = \frac{B^2 r^4 \omega^2}{4R} = 0,16 \text{ Вт.}$$

Задача 7

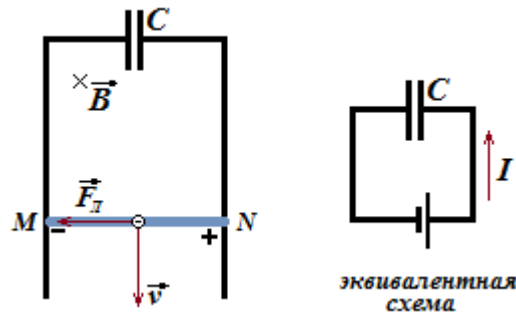
Падение проводящей перемычки в магнитном поле (ЕГЭ, 2006)

Перемычка MN скользит по двум вертикальным направляющим под действием силы тяжести без потери контакта. Длина перемычки l , масса m . Вверху цепь замкнута на конденсатор емкостью C . Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} . Каково ускорение перемычки? Сопротивлением проводников и силой трения пренебречь.



Решение

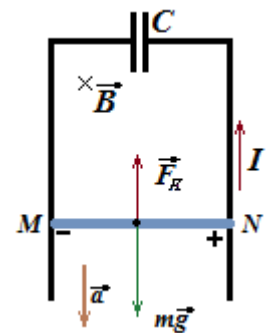
1 При движении переключки в магнитном поле в ней возникает ЭДС индукции, природа которой – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. полярность ЭДС определяем по правилу левой руки.



Мгновенное значение ЭДС индукции равно $\mathcal{E}_i = Bvl$,

где v - мгновенная скорость переключки.

2 По контуру, содержащему конденсатор и переключку MN , потечет ток. На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера. Направление силы Ампера определяем по правилу левой руки.



Записываем для переключки второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A$$

$$ma = mg - IBl$$

3 Для контура, содержащего конденсатор и переключку MN , записываем второй закон Кирхгофа: $U_C = \mathcal{E}_i$

$$\frac{q}{C} = Bvl.$$

Находим заряд на конденсаторе $q = Bv l C$.

Дифференцируем полученное выражение по времени

$$\frac{dq}{dt} = BCl \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = a \text{ - ускорение переключки;}$$

$$\frac{dq}{dt} = I - \text{ток цепи} - \text{это ток зарядки конденсатора.}$$

С учетом физического смысла производных получаем

$$I = BCla .$$

4 Найденное значение тока подставляем во второй закон Ньютона

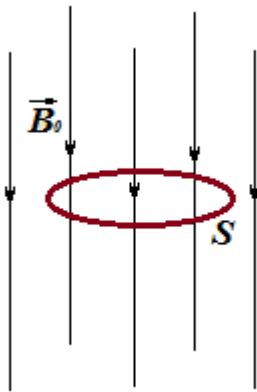
$$ma = mg - BCla \cdot Bl$$

После преобразований получаем ускорение перемычки

$$a = \frac{mg}{m + CB^2 \cdot l^2} .$$

Задача 8

Заряд, прошедший по цепи



Плоский проволочный каркас находится в однородном магнитном поле индукции B_0 . Плоскость контура перпендикулярна магнитным линиям. Магнитное поле выключают. Какой заряд пройдет по проволочному каркасу за время выключения магнитного поля? Площадь контура S .

При выключении магнитного поля изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. В контуре возникает индукционный ток.

Записываем закон Ома для замкнутого контура

$$I = \frac{E_i}{R}$$

По определению сила тока равна $I = \frac{dq}{dt}$, ЭДС индукции $E_i = -\frac{d\Phi}{dt}$. Закон

Ома принимает вид

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{d\Phi}{Rdt}$$

После преобразований получаем $dq = -\frac{d\Phi}{R}$, где dq - заряд, прошедший по контуру при изменении магнитного потока на $d\Phi$.

Чтобы найти весь заряд Q , прошедший по цепи, суммируем все малые dq :

$$\int_0^Q dq = -\int_{\Phi_0}^0 \frac{d\Phi}{R}$$

За время убывания магнитного потока от $\Phi_0 = B_0 S$ до нуля по цепи проходит заряд

$$Q = -\frac{1}{R}(0 - \Phi_0) = \frac{\Phi_0}{R} = \frac{B_0 S}{R}$$

§6 Униполярная машина

Рассмотрим систему, состоящую из постоянного магнита, способного вращаться вокруг своей оси. П-образная проволочная рамка при помощи скользящих контактов замыкается через магнит. Опыт показывает, что при вращении магнита вокруг своей оси гальванометр фиксирует ток. Такой способ получения тока был придуман самим Фарадеем в 1831 году и получил название униполярного индуктора. «Странность» получившегося источника тока заключается в том, что магнитный поток, пронизывающий контур, образованный рамкой и магнитом, остается неизменным (рисунок 1.11).

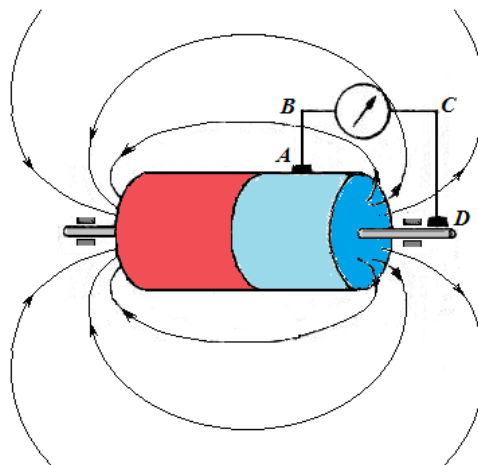


Рисунок 1.11

Если применять закон Фарадея формально, понять причину появления ЭДС индукции в данном случае невозможно.

Перейдем в систему отсчета, связанную с магнитом. В этой системе отсчета рамка $ABCD$ вращается вокруг магнита. На электроны в движущемся проводнике действует сила Лоренца.

Рассмотрим сторону CD , вращающуюся вблизи полюса магнита. Пусть скорость вращения направлена в плоскость рисунка 1.12. На электроны в стороне CD действует сила Лоренца $\vec{F}_{Лор} = q\vec{v} \times \vec{B}$, она перпендикулярна плоскости, в которой располагаются вектора \vec{v} и \vec{B} .

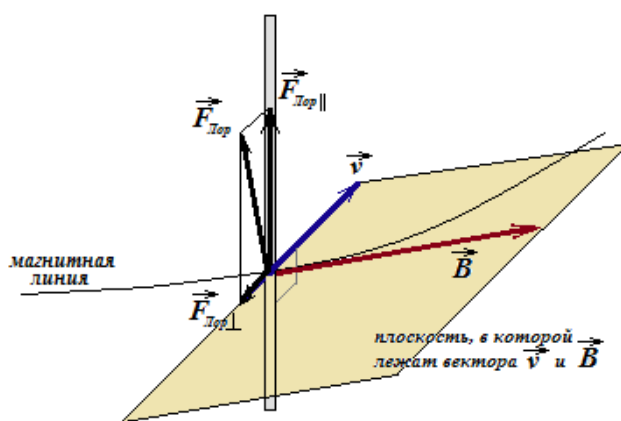


Рисунок 1.12

Сила Лоренца может быть разложена на две составляющие: $\vec{F}_{Лор\parallel}$, направленную вдоль проводника CD , и $\vec{F}_{Лор\perp}$, перпендикулярную проводнику. $\vec{F}_{Лор\perp}$ приводит к возникновению индукционного тока.

Понятно, что на электроны в проводниках AB и BC сила Лоренца тоже будет действовать. Но эти стороны рамки находятся в области более слабого магнитного поля, следовательно, ЭДС индукции в этих сторонах не может скомпенсировать ЭДС индукции в стороне CD .

Составляющая $\vec{F}_{Лор\perp}$ направлена против скорости, следовательно, тормозит движение проводника. Для обеспечения вращения внешняя сила должна со-

вершать работу – этот факт объясняет явление возникновения индукционного тока с энергетической точки зрения.

§7 Направление индукционного тока

Как показали опыты Фарадея, направление индукционного тока изменяется на противоположное, если:

1 Изменить направление движения магнита относительно катушки (вносить или выносить) (рисунок 1.13).

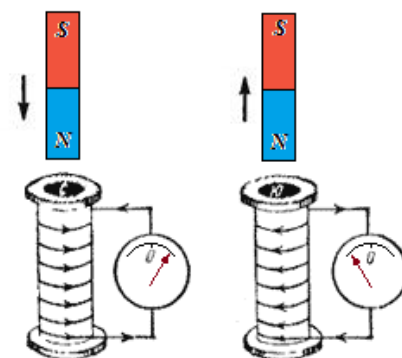


Рисунок 1.13

2 Изменить полюс магнита, вносимого (или выносимого) в катушку (рисунок 1.14).

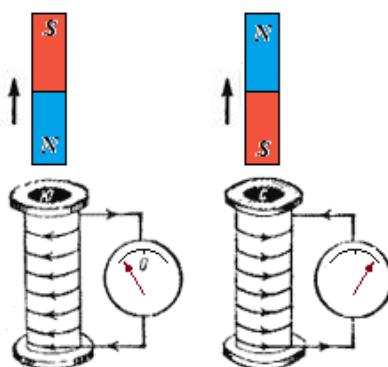


Рисунок 1.14

3 Замыкать или размыкать цепь малой катушки (рисунок 1.15).

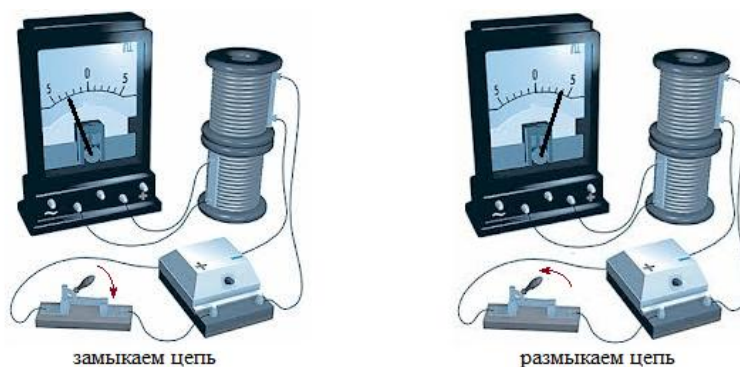


Рисунок 1.15

4 Вносить или выносить железный сердечник из малой катушки (рисунок 1.16).

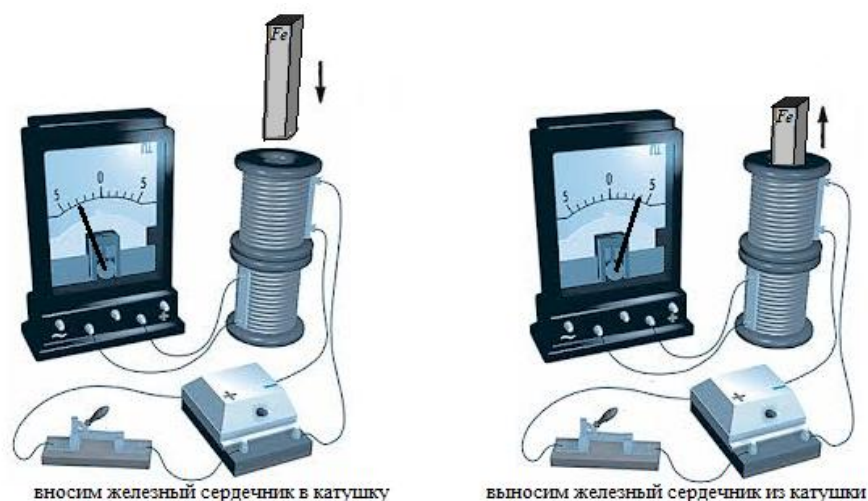


Рисунок 1.16

Очевидно, что направление индукционного тока зависит от характера изменения магнитного потока, вызывающего появление индукционного тока. Правило для определения направления индукционного тока было сформулировано Э. Х. Ленцем на основе анализа опытных фактов: **индукционный ток имеет такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, породившего этот ток.**

Применим правило Ленца для определения направления индукционного тока в проволочном контуре, если в него вносят постоянный магнит (рисунок 1.17).

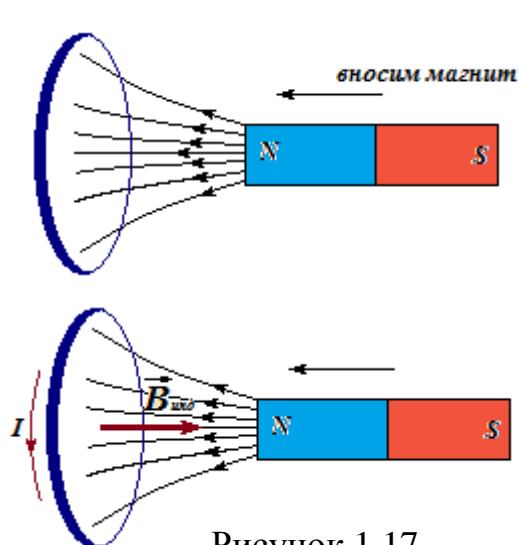


Рисунок 1.17

Магнит вносят в контур
 \Downarrow
 Магнитный поток, пронизывающий контур, увеличивается
 \Downarrow
 Необходимо **препятствовать увеличению** магнитного потока
 \Downarrow
 Магнитное поле индукционного тока должно быть направлено против поля вносимого в контур магнита $\vec{B}_{\text{инд}} \uparrow \downarrow \vec{B}_{\text{магнита}}$

Зная направление вектора $\vec{B}_{\text{инд}}$, определяем направление индукционного тока по правилу буравчика или правой руки.

Колечко, в которое вносят магнит, ведет себя как маленький магнитик. Северный полюс этого магнитика находится справа (магнитные линии выходят из северного полюса), южный – слева (рисунок 1.18).

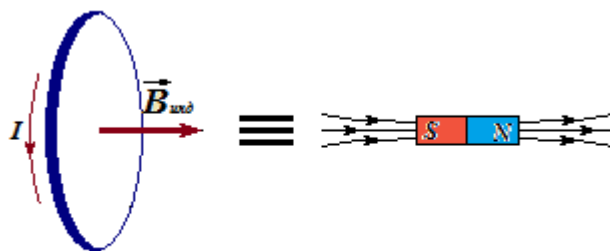


Рисунок 1.18

Одноименные полюса магнитов отталкиваются, следовательно, колечко, в которое вносят магнит, будет от него отталкиваться (рисунок 1.19).

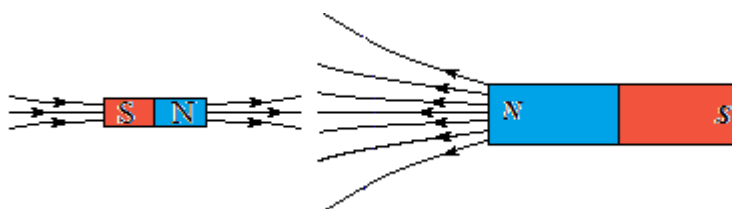


Рисунок 1.19

Отталкивание кольца от вносимого в него магнита легко пронаблюдать на опыте (рисунок 1.20).

Разрезанное колечко на другом плече коромысла необходимо в качестве противовеса. Если вносить магнит в разрезанное кольцо, отталкивания коромысла от магнита не наблюдается. Причина понятна – в разрезанном кольце не возникает индукционный ток.

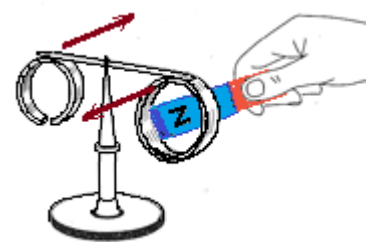


Рисунок 1.20

Очевидно, что при удалении магнита из кольца, индукционный ток будет иметь противоположное направление (рисунок 1.21).

Магнит удаляют из контура

Магнитный поток, пронизывающий контур, уменьшается



Необходимо *препятствовать убыванию* магнитного потока

Магнитное поле индукционного тока должно поддерживать убывающее внешнее магнитное $\vec{B}_{\text{вн}} \uparrow \uparrow \vec{B}_{\text{магнита}}$

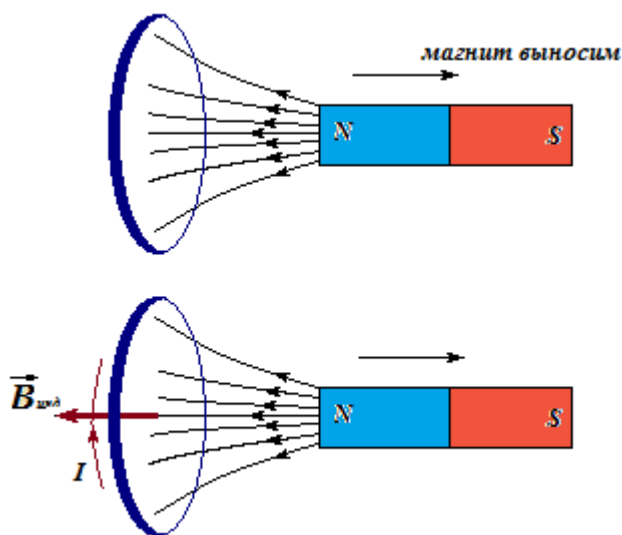


Рисунок 1.21

Контур с индукционным током ведет себя как магнитик, северный полюс которого расположен слева, а южный справа (рисунок 1.22).

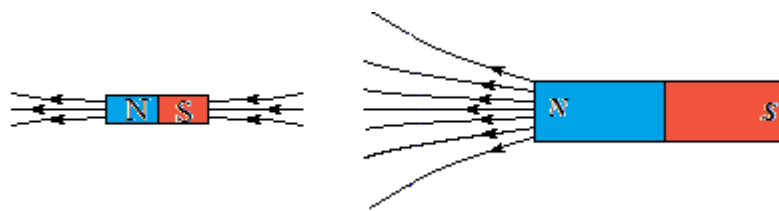


Рисунок 1.22

Разноименные полюса магнитов притягиваются, следовательно, кольцо притягивается к удаляемому из него магниту.

Происхождение правила Ленца можно показать на основании закона сохранения энергии. Предположим, что при внесении магнита в проволочное кольцо направление индукционного тока противоположно найденного нами ранее (рисунок 1.23).

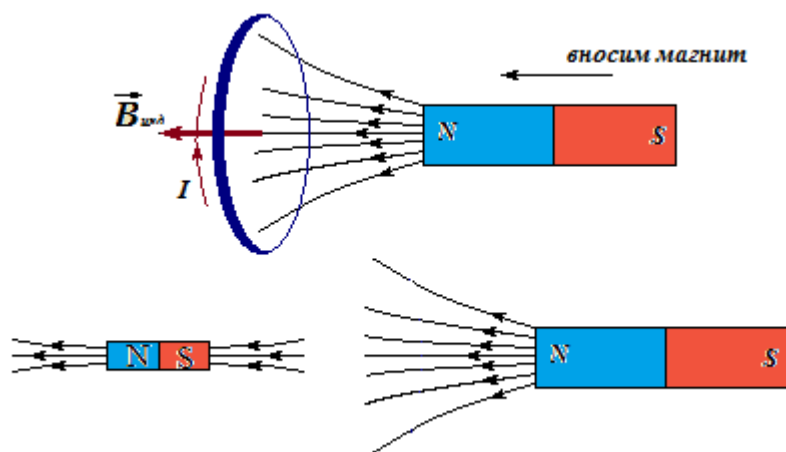


Рисунок 1.23

Колечко с индукционным током ведет себя как магнитик, обращенный к вносимому магниту противоположным полюсом. Разноименные полюса магнитов притягиваются, следовательно, колечко должно притягиваться к вносимому магниту. Согласно третьему закону Ньютона магнит, в свою очередь, будет притягиваться к колечку. Что получаем в итоге?

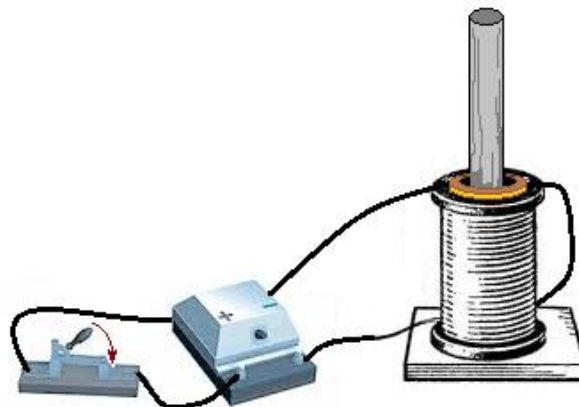
- 1 По кольцу течет ток, это приводит к выделению тепла Джоуля Ленца. Получаем тепловую энергию.
- 2 Кольцо и магнит разгоняются вследствие взаимного притяжения, их кинетическая энергия увеличивается.

Получаем тепловую и кинетическую энергии без каких-либо затрат, чего с точки зрения закона сохранения энергии быть не может. Значит, верным является первоначальное решение: направление индукционного тока таково, что кольцо отталкивается от вносимого в него магнита. В этом случае магнит тоже отталкивается от кольца согласно третьему закону Ньютона. Значит, внешняя сила должна совершать работу, чтобы двигать магнит в направлении кольца. При этом затрачиваемая нами энергия преобразуется в конечном итоге в тепло Джоуля-Ленца.

Примеры решения задач

Задача 1 (ЕГЭ, 2010 год)

Катушка, насаженная на железный сердечник, подключена к источнику постоянного тока. На торце катушки расположено тонкое медное колечко. Что произойдет с колечком при замыкании цепи катушки?



После замыкания ключа в катушке появляется ток



Нарастающий ток создает магнитное поле, индукция которого тоже возрастает, так как $B \propto I$



Магнитный поток $\Phi = BS$, пронизывающий медное колечко, нарастает



В колечке возникает индукционный ток, магнитное поле которого должно препятствовать нарастанию магнитного потока



Магнитное поле индукционного тока направлено против поля катушки

$$\vec{B}_{\text{инд}} \uparrow \downarrow \vec{B}_{\text{катушки}}$$



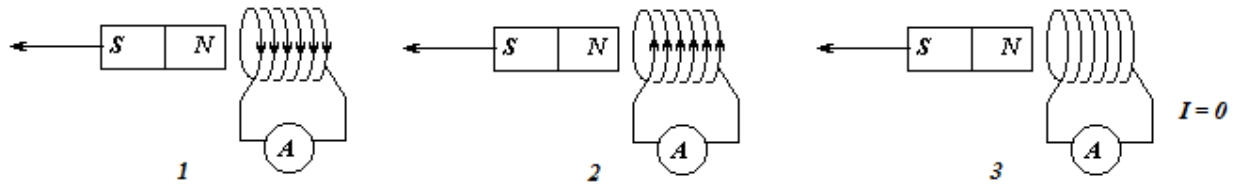
Индукционный ток направлен против тока в катушке



Токи противоположного направления отталкиваются, следовательно, колечко подпрыгнет

Тест «Правило Ленца»

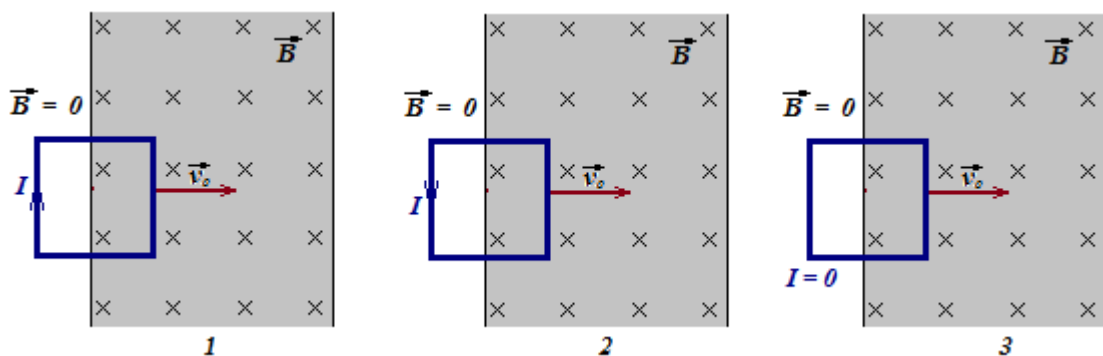
1 Постоянный магнит удаляют из катушки, замкнутой на гальванометр. На каком рисунке правильно показано направление индукционного тока?



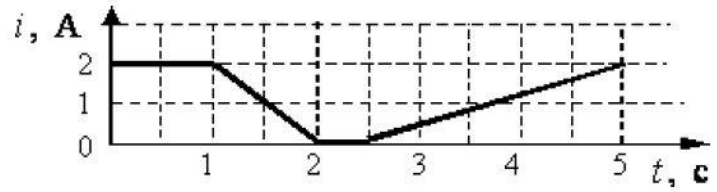
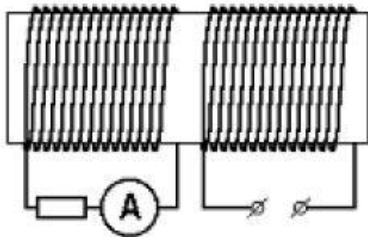
2 В проволочный виток поместили катушку так, что электрический контакт между витком и катушкой отсутствует. На каком рисунке правильно указано направление индукционного тока, возникающего в проволочном витке при размыкании цепи?



3 На каком рисунке правильно указано направление индукционного тока, возникающего в прямоугольном контуре при внесении его в магнитное поле?



4 На железный сердечник надеты две катушки, как показано на рисунке. По правой катушке пропускают ток, который меняется согласно приведенному графику.



В какие промежутки времени направление тока в левой катушке будет совпадать с направлением тока в правой катушке?

- 1) от 1 с до 2 с и от 2,5 с до 5 с;
- 2) только от 1 с до 2 с;
- 3) от 0 с до 1 с и от 2 с до 2,5 с;
- 4) только от 2,5 с до 5 с.

5 Две катушки надеты на один железный сердечник. Нижняя катушка подключена к источнику постоянного тока, верхняя катушка замкнута на гальванометр. Как будет направлен индукционный ток в верхней катушке при удалении сердечника?



- А) индукционный ток направлен против тока в нижней катушке;
- Б) индукционный ток сонаправлен с током в нижней катушке;
- В) индукционный ток в данном случае не возникает.

§8 Токи Фуко

Индукционные токи необязательно текут по проводам. Рассмотрим металлический диск, расположенный в однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны диску.

Пусть магнитное поле изменяется. Меняющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности, охватывающие магнитные линии (рисунок 1.24).

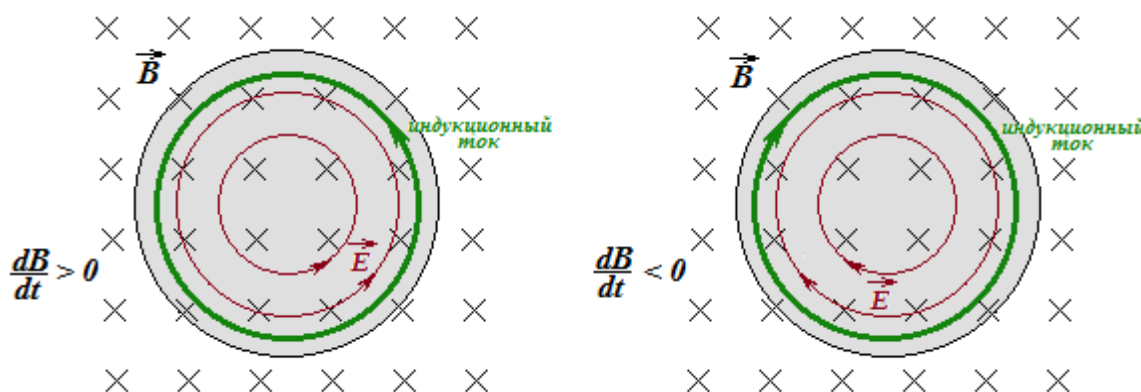


Рисунок 1.24

Вихревое электрическое поле приведет свободные электроны в диске в направленное движение – по диску потечет ток. Такие токи, возникающие в массивных проводниках, оказавшихся в меняющемся магнитном поле, называются вихревыми токами или токами Фуко.

Согласно правилу Ленца вихревые токи имеют такое направление, что создаваемое ими магнитное поле стремится противодействовать изменению магнитного потока, пронизывающему проводник.

Вихревые токи возникают и в том случае, когда массивный проводник движется в магнитном. Природа индукционных вихревых токов иная. Поскольку магнитное поле неизменно, вихревое электрическое поле не возникает. Однако на электроны в проводнике, движущемся в магнитном поле будет действовать сила Лоренца, приводя электроны в направленное движение (рисунок 1.25).

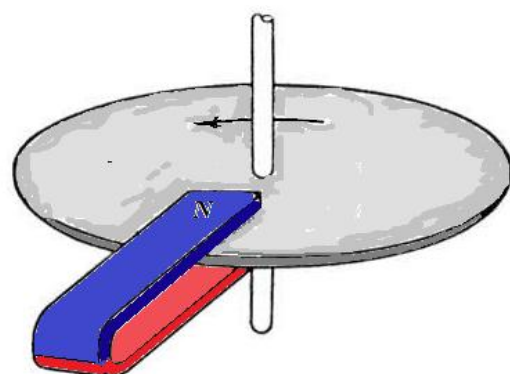


Рисунок 1.25

Пусть металлический диск вращается, пересекая малую область однородного магнитного поля (рисунок 1.26).

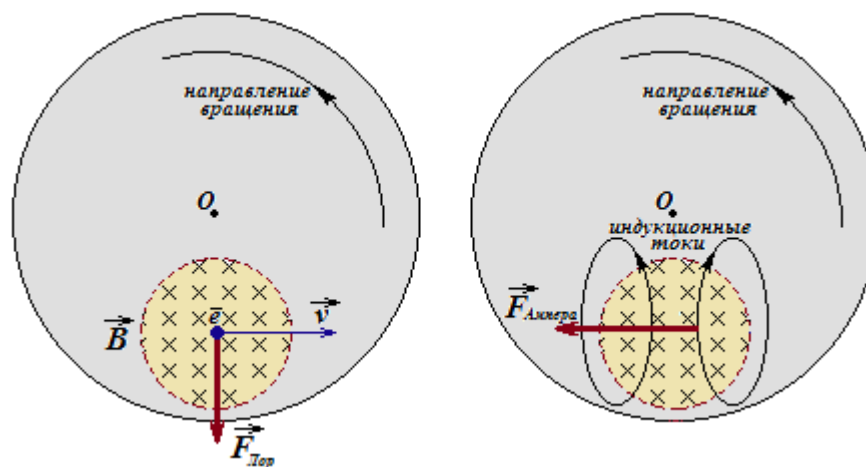


Рисунок 1.26

На электроны в той части диска, которая пересекает область магнитного поля, действует сила Лоренца. Под действием силы Лоренца свободные электроны приходят в направленное движение – возникает ток, направление которого противоположно направлению движения электронов.

Интересно, что на участки вихревых токов, которые оказались в магнитном поле, действует сила Ампера. Направление этой силы определяем по правилу левой руки. Видим, что сила Ампера направлена против вращения диска, следовательно, диск затормаживается.

Торможение диска можно объяснить на основании правила Ленца. Часть диска выходит из области магнитного поля, пронизывающий ее магнитный поток уменьшается, следовательно, в этой части диска возникает индукционный ток, магнитное поле которого сонаправлено с внешним полем. Диск тормозится силой Ампера, он «сопротивляется» выходу из поля и связанному с этим выходом уменьшением магнитного потока.

Другая часть диска входит в область магнитного поля. Пронизывающий эту часть диска магнитный поток нарастает. Согласно правилу Ленца диск «сопротивляется» увеличению магнитного потока. В этой части диска

возникает индукционный ток, магнитное поле которое направлено против внешнего. За счет действующей на этот ток силы Ампера диск тормозится.

Эффект торможения массивного проводника в магнитном поле используется для демпфирования (гашения) колебаний. Этот эффект можно использовать для плавного торможения транспорта (рисунок 1.27).

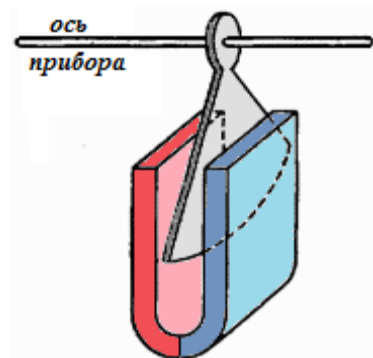


Рисунок 1.27

Вихревые токи используются в индукционных печах. В таких печах переменный ток создает меняющееся магнитное поле, которое в свою очередь порождает вихревое электрическое поле. Под действием вихревого электрического поля в массивном проводнике возникают токи Фуко, а протекание тока по проводнику сопровождается тепловым действием. Индукционные плиты все чаще встречаются на современных кухнях. В индукционных печах плавят металл (рисунок 1.28).



Рисунок 1.28

Возникновение вихревых токов в массивных проводниках при их движении в магнитном поле используется в индукционных счетчиках электроэнергии (рисунок 1.29).

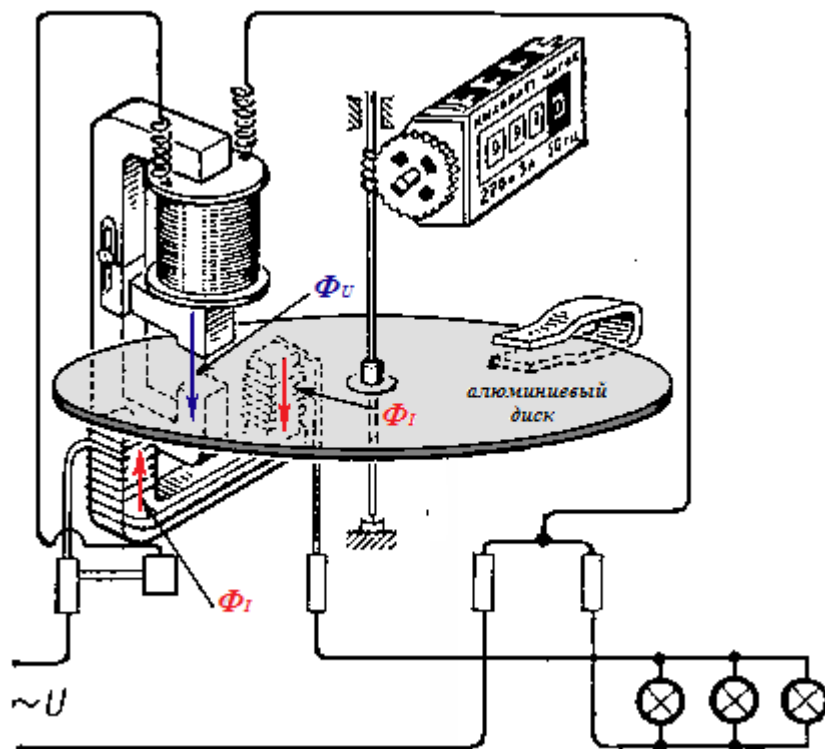


Рисунок 1.29

Алюминиевый диск помещен между полюсами двух электромагнитов. Одна из катушек электромагнита включена последовательно с цепью потребителя – по ней течет общий ток потребителя. Вторая катушка включена параллельно цепи потребителя. Переменные магнитные поля этих катушек создают вихревые токи в алюминиевом диске. Токи Фуко, взаимодействуя с породившими их магнитными полями, приводят алюминиевый диск в движение. Червячная передача связывает счетчик оборотов с осью диска.

Вихревые токи возникают в сердечниках генераторов, трансформаторов, двигателей. Тепло Джоуля – Ленца, выделяющееся за счет протекания токов Фуко в этих устройствах, представляет собой энергетические потери. Для уменьшения вихревых токов и связанных с ними тепловых потерь сердечники делают наборными из стальных листов, хорошо изолированных друг от друга (рисунок 1.30).

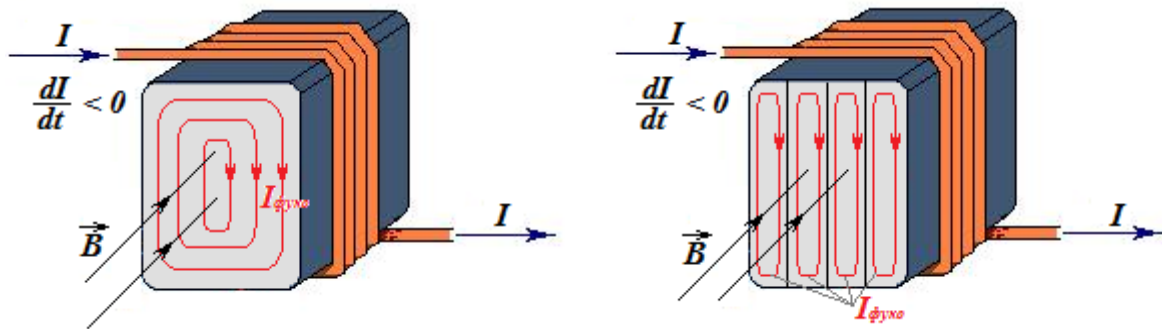
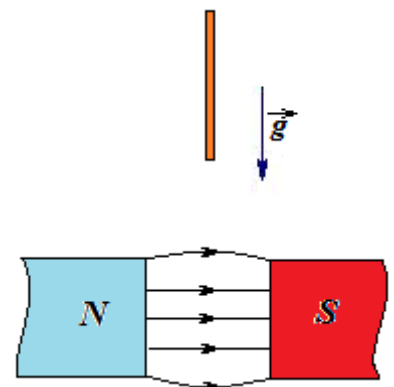


Рисунок 1.30

Сопротивление тонких стальных листов больше сопротивления сплошного литого сердечника, это приводит к ограничению токов Фуко и уменьшению тепла Джоуля – Ленца.

Примеры решения задач (ЕГЭ – 2012 год)

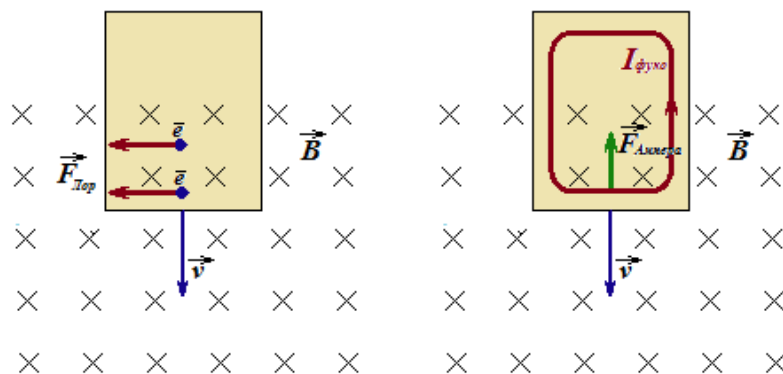
В зазоре между полюсами электромагнита создано сильное магнитное поле, линии индукции которого практически горизонтальны. Над зазором на некоторой высоте удерживают длинную плоскую медную пластинку, параллельную вертикальным полюсам магнита. Затем пластинку отпускают без начальной скорости, и она падает, проходя через зазор между полюсами, не касаясь их. Опишите, опираясь на физические законы, как и почему будет изменяться скорость пластинки во время ее падения.



I этап – движение пластины вне магнитного поля.

Под действием силы тяжести пластина падает с ускорением свободного падения \vec{g} . Скорость пластины растет прямо пропорционально времени $v = gt$.

II этап – пластина входит в область магнитного поля.



Магнитный поток, пронизывающий пластину, увеличивается



В пластине возникает индукционный ток (ток Фуко). Природа ЭДС индукции, вызвавшей появление тока – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике.



Согласно правилу Ленца направление индукционного тока таково, что его магнитное поле препятствует увеличению магнитного потока,

пронизывающего пластину.



На вихревой ток в пластине действует сила Ампера, направление которой определяем по правилу левой руки.



Записываем для пластины второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{Ампера}}$$

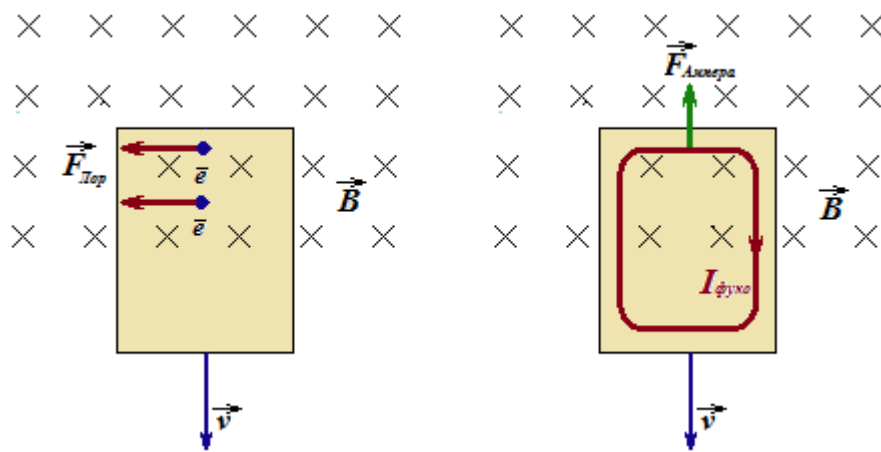
$$ma = F_{\text{Ампера}} - mg$$



Если модуль силы Ампера превосходит величину силы тяжести, ускорение пластины оказывается направленным вверх, против скорости.

Пластина тормозится.

III этап – пластина выходит из магнитного поля.



Магнитный поток, пронизывающий пластину, уменьшается



В пластине возникает индукционный ток (ток Фуко). Природа ЭДС индукции, вызвавшей появление тока – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике.



Согласно правилу Ленца направление индукционного тока таково, что его магнитное поле препятствует уменьшению магнитного потока,

пронизывающего пластину.



На вихревой ток в пластине действует сила Ампера, направление которой определяем по правилу левой руки.



Записываем для пластины второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{Ампера}}$$

$$ma = F_{\text{Ампера}} - mg$$



Если модуль силы Ампера превосходит величину силы тяжести, ускорение пластины оказывается направленным вверх, против скорости.

Пластина тормозится.

После того, как пластина полностью выйдет из области магнитного поля, вихревой ток и действующая на него сила Ампера исчезнут. Пластина продолжит разгон с ускорением свободного падения.

§9 Диамагнитный эффект

Решим задачу

Согласно планетарной модели в центре атома находится положительно заряженное ядро, электроны движутся вокруг ядра по круговым орбитам (рисунок 1.31). Что будет происходить, если атом водорода окажется в слабом магнитном поле, индукция которого перпендикулярна плоскости орбиты электрона?

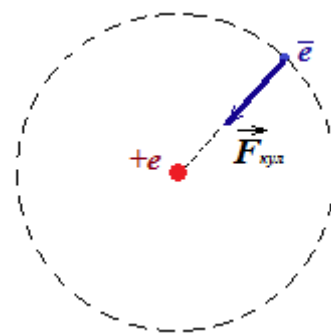


Рисунок 1.31

В отсутствие магнитного поля единственный электрон атома водорода движется вокруг ядра под действием кулоновской силы, она сообщает электрону центростремительное ускорение.

$$ma_{цс} = F_{кул}$$
$$m\omega_0^2 R = \frac{ke^2}{R^2},$$

где ω_0 - угловая скорость вращения электрона;

R - радиус орбиты.

Угловая скорость орбитального движения при отсутствии магнитного поля равна $\omega_0 = \sqrt{\frac{ke^2}{mR^3}}$.

При появлении магнитного поля на движущийся электрон начинает действовать сила Лоренца. Записываем второй закон Ньютона

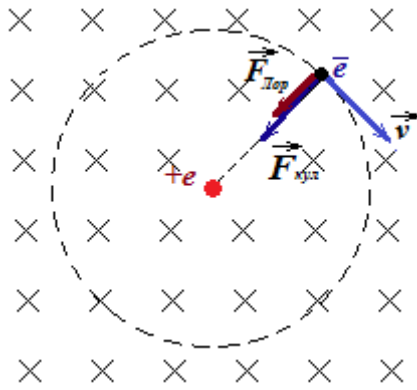


Рисунок 1.32

$$\begin{aligned}
 ma_{\text{ис}} &= F_{\text{кул}} + F_{\text{Лор}} \\
 m\omega^2 R &= \frac{ke^2}{R^2} + eBv \\
 m\omega^2 R &= \frac{ke^2}{R^2} + eB\omega R,
 \end{aligned}$$

ω - угловая скорость вращения электрона при наличии магнитного поля.

Решаем квадратное уравнение и находим угловую скорость ω .

$$m\omega^2 R - eB\omega R - \frac{ke^2}{R^2} = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения равен $D = \sqrt{(eBR)^2 + 4mR \cdot \frac{ke^2}{R^2}}$.

По условию магнитное поле слабое, т.е. модуль силы Лоренца много меньше кулоновской силы. С учетом малости силы Лоренца дискриминант примерно

$$\text{равен } D \approx \sqrt{4mR \cdot \frac{ke^2}{R^2}} = 2\sqrt{\frac{mke^2}{R}}.$$

Угловая скорость вращения равна

$$\omega = \frac{eBR \pm 2\sqrt{\frac{mke^2}{R}}}{2mR}.$$

Один из корней отрицательный (по причине малости силы Лоренца в сравнении с кулоновской силой) – этот корень физического смысла не имеет.

Окончательно для угловой скорости вращения электрона вокруг ядра при на-

личии слабого магнитного поля получаем
$$\omega = \frac{eB}{2m} + \sqrt{\frac{ke^2}{mR^3}} = \omega_0 + \frac{eB}{2m} .$$

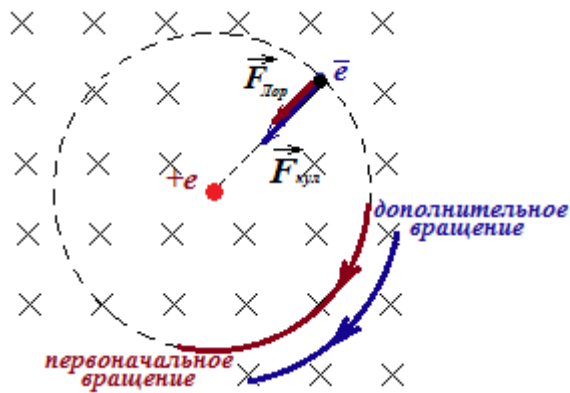


Рисунок 1.33

Видим, что угловая скорость вращения увеличилась на величину $\frac{eB}{2m}$.

Этот результат можно трактовать как появление дополнительного вращения в первоначальном направлении (рисунок 1.33).

Как изменится результат, если электрон вращался вокруг ядра в противоположном направлении?

Сила Лоренца изменяет направление, и второй закон Ньютона принимает вид

$$m\omega^2 R = \frac{ke^2}{R^2} - eBv.$$

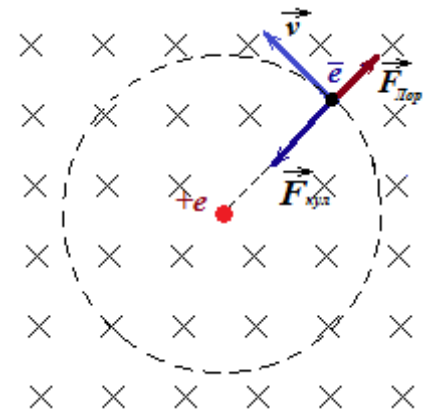


Рисунок 1.34

Решаем квадратное уравнение и находим угловую скорость ω .

$$m\omega^2 R + eB\omega R - \frac{ke^2}{R^2} = 0.$$

Дискриминант квадратного уравнения тот же, что и в первом случае. Угловая скорость вращения электрона равна

$$\omega = -\frac{eB}{2m} + \sqrt{\frac{ke^2}{mR^3}} = \omega_0 - \frac{eB}{2m}.$$

Угловая скорость вращения электрона вокруг ядра уменьшилась. Этот факт можно трактовать как появление у электрона дополнительного вращения в направлении, противоположном первоначальному направлению вращения (рисунок 1.34).

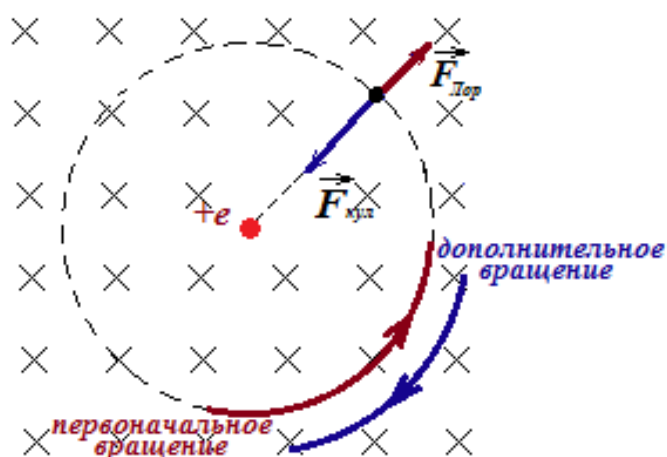


Рисунок 1.34

Подведем итоги

1 При помещении атома в слабое магнитное поле электрон приходит в дополнительное вращение вокруг магнитной линии. Направление дополнительного вращения не зависит от первоначального направления вращения электрона вокруг ядра.

2 Очевидно, что электроны в любом атоме, оказавшемся в магнитном поле, приходят в дополнительное вращение вокруг магнитной линии в одном направлении (рисунок 1.35). Если «орбита» электрона была не перпендикулярна индукции магнитного поля, вращаться вокруг магнитной линии начинает

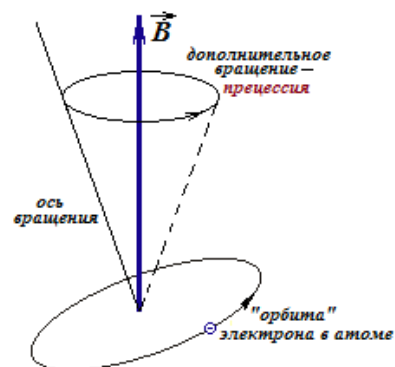


Рисунок 1.35

ось вращения. Это дополнительное вращение называется *ларморовой прецессией*.

3 Дополнительное вращение, в которое пришли все электроны в атомах – это элементарные токи, а токи, как известно, создают магнитное поле. Поскольку направление дополнительного вращения, а значит и дополнительных элементарных токов в веществе, одинаково, магнитные поля этих токов тоже направлены в одну сторону (направление тока противоположно направлению движения отрицательного электрона) (рисунок 1.36). Применив правило буравчика, видим, что магнитное поле, создаваемое элементарными токами за счет ларморовой прецессии, *направлено против внешнего магнитного поля*.

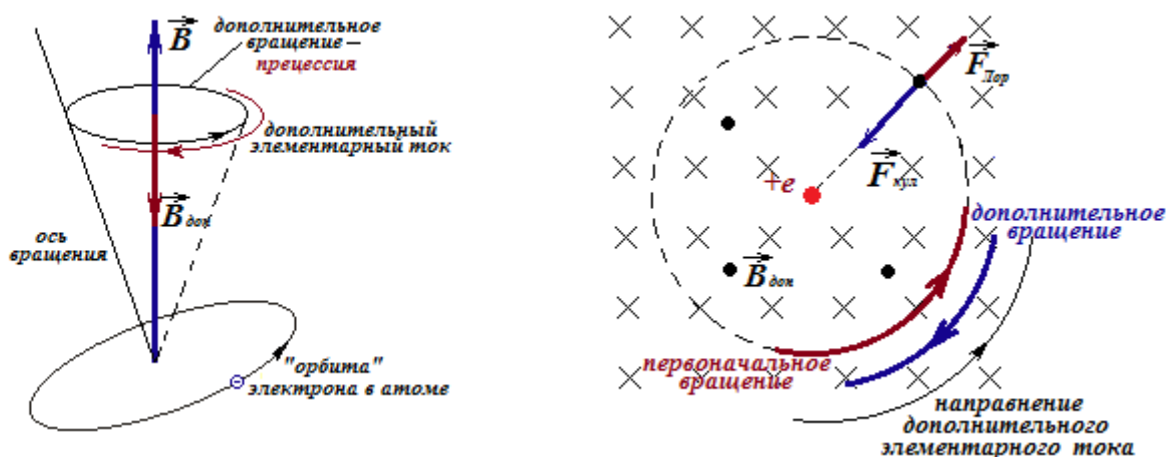


Рисунок 1.36

Таким образом, дополнительные элементарные токи, появившиеся в веществе при помещении его в магнитное поле, стремятся уменьшить внешнее магнитное поле. Этот эффект называется *диамагнитным эффектом*.

4 По существу механизм диамагнитного эффекта связан с правилом Ленца, согласно которому замкнутый контур всегда сопротивляется изменению пронизывающего его магнитного потока. В общем случае правило Ленца можно сформулировать так: *любая динамическая система стремится*

противодействовать изменению магнитного поля, в котором она находится.

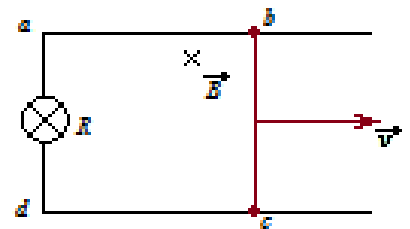
§10 Задачи для самостоятельного решения

1 В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью $0,001\text{ м}^2$, расположенный перпендикулярно магнитным линиям. Какой величины ток (в мкА) потечет по витку, если индукция магнитного поля будет убывать с постоянной скоростью $0,05\text{ Тл/с}$? Сопротивление витка 2 Ом .

2 Проволочное кольцо радиусом $r = 0,1\text{ м}$ лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца $R = 2\text{ Ом}$, вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна $B = 5 \cdot 10^{-5}\text{ Тл}$.

3 По П-образной рамке, наклоненной под углом 30° к горизонту и помещенной в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости рамки, начинает соскальзывать без трения перемычка массой 30 г . Длина перемычки 10 см , ее сопротивление 2 мОм , индукция магнитного поля $0,1\text{ Тл}$. Найдите установившуюся скорость перемычки. Сопротивлением рамки пренебречь.

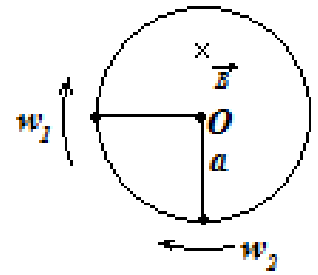
4 Плоскость прямоугольной проволочной рамки $abcd$ на однородном магнитном полю с индукцией $B = 10^{-3}\text{ Тл}$. Сторона bc длиной $l = 1\text{ см}$ может скользить без нарушения контакта с постоянной скоростью $v = 10\text{ см/с}$ по сторонам ad и dc . Между



какими a и d включена лампочка сопротивлением $R = 5\text{ Ом}$. Какую силу необходимо приложить к стороне bc для осуществления такого движения? Сопротивлением остальной части рамки пренебречь.

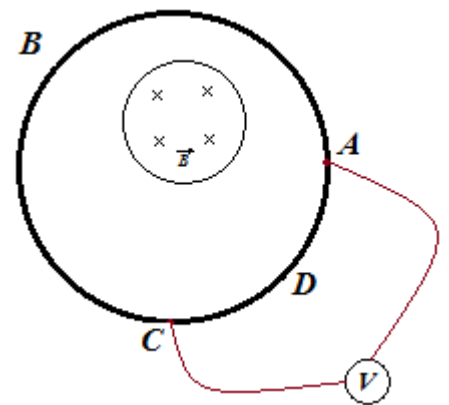
5 Тонкое проволочное кольцо радиусом a расположено в однородном

магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости кольца. По кольцу скользят в одном направлении две перемычки с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$). Перемычки и кольцо сделаны из одного куска провода, сопротивление единицы длины которого равно ρ .



Определите величину и направление тока через перемычки, когда угол между ними равен $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Между перемычками в точке O и между кольцом и перемычками хороший электрический контакт.

б Сопротивления участков ADC и CBA проволочного кольца равны R и $3R$. Кольцо пронизывается магнитным полем индукции B , сосредоточенным в узкой области пространства площадью S . Что покажет вольтметр сопротивлением $4R$, присоединенный к точкам A и C, если магнитное поле равномерно изме-



нять со скоростью $\frac{dB}{dt}$? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Глава 2 Машины постоянного тока

§1 Двигатели и генераторы постоянного тока

Под машиной постоянного тока понимают устройство, в котором механическая энергия преобразуется в электрическую – в этом случае машина работает как генератор, или наоборот – машина работает как двигатель, преобразуя электрическую энергию в механическую.

Для того, чтобы понять суть энергетических преобразований, рассмотрим упрощенную модель машины постоянного тока.

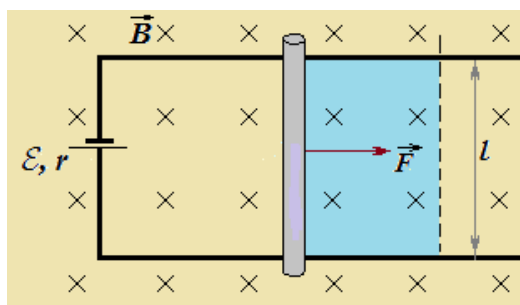


Рисунок 2.1

П-образная рамка замкнута на источник тока. По рамке без трения и нарушения электрического контакта может скользить стержень сопротивлением R . Вся конструкция находится в однородном магнитном поле индукции \vec{B} (рисунок 2.1).

Прикладывая к стержню силу \vec{F} , будем перемещать его вправо. При движении проводника в магнитном поле в нем будет возникать ЭДС индукции, природа которой – действие силы Лоренца на заряды в движущемся проводнике. Полярность этой ЭДС определим по правилу левой руки. Эквивалентная схема получившейся цепи изображена на рисунке. На ток, текущий по цепи, действует сила Ампера (рисунок 2.2).

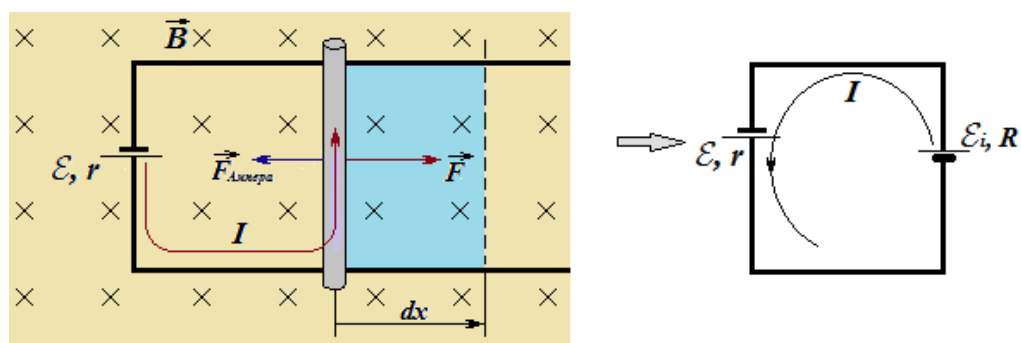


Рисунок 2.2

Запишем закон Ома и преобразуем выражение

$$I = \frac{E + E_i}{R + r}$$

$$E + E_i = IR + Ir.$$

С учетом того, что ЭДС индукции в движущемся поступательно проводнике равна $E_i = Bvl$, получаем

$$E + Bvl = IR + Ir.$$

Умножим обе части уравнения на заряд $dq = Idt$, прошедший по цепи за малый промежуток времени dt

$$Edq + Bvl \cdot Idt = I^2 Rdt + I^2 rdt.$$

Учтем, что $IBl = F_A$ - сила Ампера, действующая на ток в стержне, а $vdt = dx$ - перемещение стержня за время dt .

$$Edq + F_A dx = I^2 Rdt + I^2 rdt. \quad (5)$$

Проанализируем полученный результат.

$Edq = A_{ист}$ - работа источника или затраченная им энергия;

$Q_R = I^2 Rdt$ - тепло, выделившееся на резисторе R ;

$Q_r = I^2 rdt$ - тепло, выделившееся на резисторе r ;

$F_A dx = -A_{\text{Ампера}}$ - работа силы Ампера, взятая с противоположным знаком (проводник перемещается против силы Ампера, следовательно, ее работа отрицательна). Запишем для стержня теорему об изменении кинетической энергии $\Delta E_k = A_F + A_{\text{Ампера}}$. Тогда $F_A dx = -A_{\text{Ампера}} = A_F - \Delta E_k$.

С учетом сказанного выражение (5) принимает вид

$$A_{\text{ист}} + A_F = Q_R + Q_r + \Delta E_k. \quad (6)$$

Полученное выражение – не что иное, как запись закона сохранения энергии. Видим, что *работа внешних сил* (источника и силы F, действующей на стержень) *приводит к изменению полной энергии системы* – в цепи выделяется тепло и у стержня появляется кинетическая энергия.

1 Пусть на стержень не действует внешняя сила \vec{F} . Понятно, что в этом случае стержень придет в движение в направлении силы Ампера. В этом случае *система начинает работать как двигатель*.

Изменение направления движения стержня приводит к изменению полярности ЭДС индукции (рисунок 2.3).

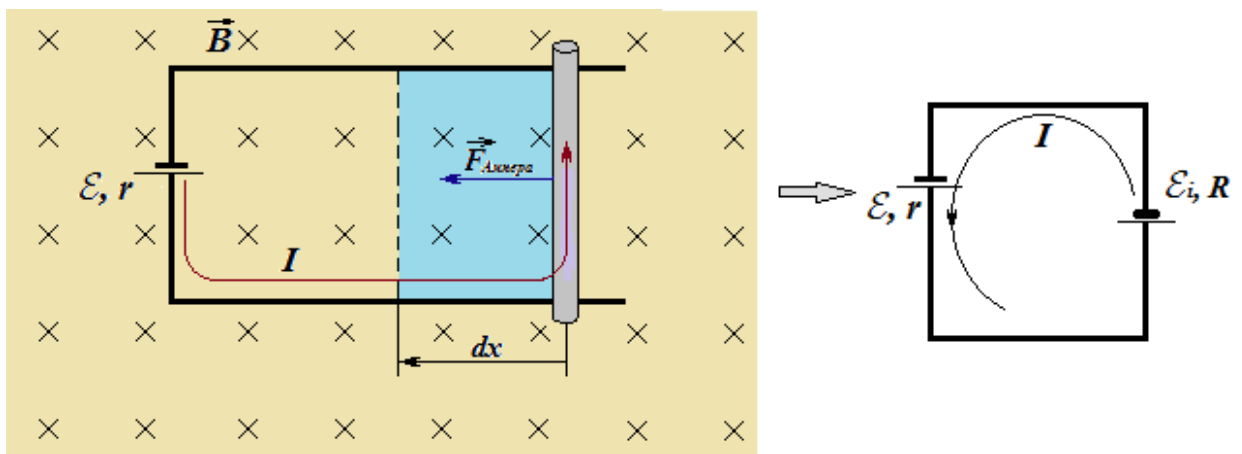


Рисунок 2.3

Закон Ома для полной цепи принимает вид

$$E - E_i = IR + Ir . \quad (7)$$

Проведем аналогичные преобразования

$$\begin{aligned} E - E_i = IR + Ir \quad | \times dq = Idt \\ Edq = I^2 R dt + I^2 r dt + E_i dq \\ A_{\text{ист}} = Q_R + Q_r + E_i dq. \end{aligned} \quad (8)$$

Выясним смысл слагаемого $E_i dq$. ЭДС индукции в движущемся проводнике

$E_i = Bvl$, следовательно

$$E_i dq = Bvl \cdot Idt = (IBl) \cdot (vdt) = F_A \cdot dx = A_{\text{Ампера}} = \Delta E_{\text{к}}.$$

Окончательно получаем

$$A_{\text{ист}} = Q_R + Q_r + \Delta E_{\text{к}} . \quad (9)$$

В режиме работы двигателя энергия источника преобразуется в кинетическую энергию стержня и тепло.

Важно! В электрическом двигателе преобразование энергии источника в механическую энергию происходит за счет того, что в контуре возникает ЭДС индукции.

Устройство машины постоянного тока изображено на рисунке 2.4.

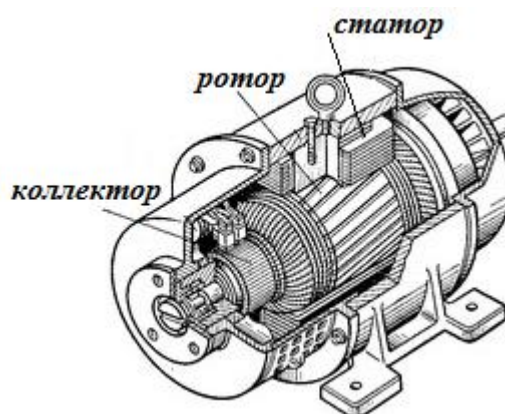


Рисунок 2.4

Статор – неподвижная часть машины. Статор представляет собой полый стальной барабан, в пазы которого уложены рамки. Ток в обмотке статора создает магнитное поле (рисунок 2.5).



Рисунок 2.5

Ротор или якорь – барабан с пазами, набранный из листовой стали. В пазы ротора тоже закладываются рамки. Если



Рисунок 2.6

якорь вращать, то в его обмотках будет индуцироваться ЭДС – машина работает как генератор. Если же по обмотке якоря пропускают ток, то под действием сил Ампера якорь приходит во вращательное движение – машина работает как двигатель (рисунок 2.6).

Основное различие в двигателях связано со способом создания магнитного поля. Обмотки ротора и статора могут соединяться последовательно и питаться от одного источника (сериесные машины), в маломощных двига-

телях обмотки ротора и статора соединяются параллельно (шунтовые машины).

На одном валу с ротором находится коллектор – барабан, по ободу которого расположены медные пластинки. Каждая пара диаметрально расположенных пластин является выводами рамок ротора. Коллектор предназначен для изменения направления тока в рамках якоря.

Принцип работы двигателя основан на поведении рамки с током в магнитном поле (рисунок 2.7).

Пусть в начальный момент плоскость рамки параллельна магнитным линиям. Силы Ампера, действующие на стороны BC и DA , создают вращающий момент. Будем смотреть на рамку сверху.

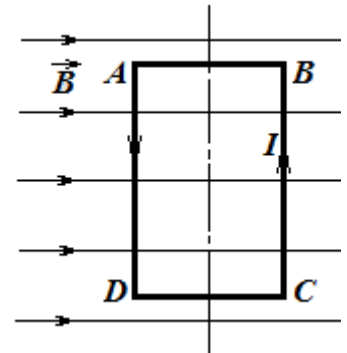


Рисунок 2.7

Сейчас вращающий момент максимален и равен

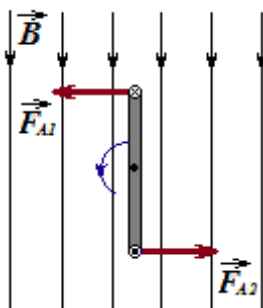


Рисунок 2.8

Рамка начинает поворачиваться против часовой стрелки (рисунок 2.8).

$$M = IBS.$$

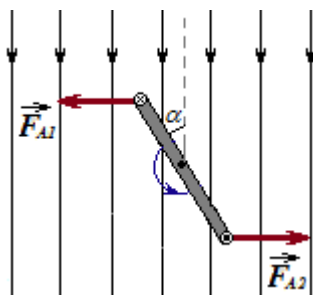


Рисунок 2.9

В процессе поворота силы Ампера сохраняют свое направление и численное значение (рисунок 2.9). А вот вращающий момент уменьшается, поскольку уменьшается плечо каждой из сил Ампера:

$$M = IBS \cos \alpha.$$

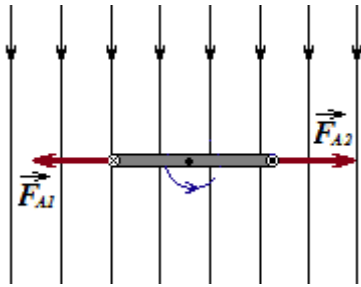


Рисунок 2.10

Рамка пришла в положение, перпендикулярное магнитным линиям. Силы Ампера не изменились, но вращающий момент стал равным нулю. Это положение является для рамки положением равновесия (рисунок 2.10).

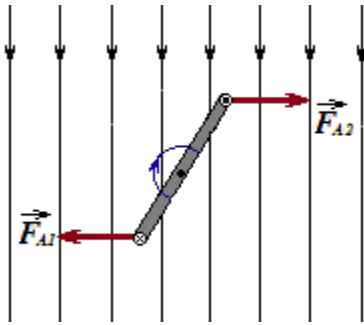


Рисунок 2.11

По мере поворота рамка приобрела кинетическую энергию, поэтому она проскакивает положение равновесия. Силы Ампера остались прежними, а вращающий момент поменял направление на противоположное. Рамка тормозит (рисунок 2.11).

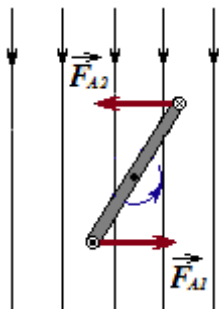


Рисунок 2.12

Для того, чтобы рамка продолжила вращение в прежнем направлении, необходимо сохранить направление вращающего момента. Для этого нужно изменить направление сил Ампера, а, следовательно, изменить направление тока в рамке (рисунок 2.12).

Таким образом, для поддержания вращения рамки необходимо изменять направление тока в ней каждый раз при прохождении рамкой положения равновесия.

Это проблема решается путем использования полуколец и скользящих контактов – щеток (рисунок 2.13). Каждая щетка жестко соединена с каким-либо полюсом источника. Полукольцо пол оборота касается одной щетки, пол-

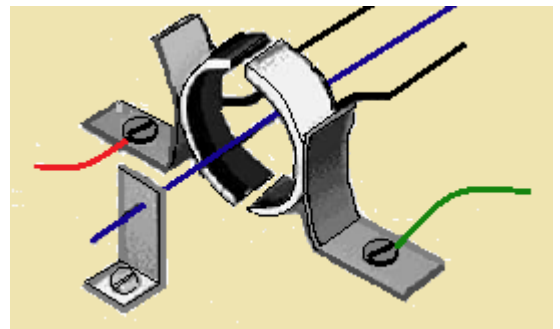


Рисунок 2.13

оборота – другой щетки. Тем самым обеспечивается изменение направления тока в рамке через каждые пол-оборота.

Якорь реального двигателя содержит большое число рамок. Увеличение числа рамок приводит к увеличению суммарного вращающего момента со стороны магнитного поля (его называют моментом на валу). Постоянство вращающегося момента и, как следствие, равномерность вращения ротора, обеспечивается тем, что рамки уложены под разными углами друг к другу.

Остановимся на некоторых особенностях работы двигателя с независимым возбуждением (магнитное поле создается постоянным магнитом или обмотка статора включена параллельно обмотке ротора).

а) Пусковой ток

В момент включения двигателя якорь еще неподвижен. Это означает, что ЭДС индукции в обмотке якоря отсутствует. Закон Ома в момент пуска принимает вид

$$E - E_i = IR + Ir$$
$$E = I_0 (R + r).$$

Видим, что в момент запуска ток в обмотке якоря принимает максимальное значение. Вся энергия источника в этот момент тратится на тепло Джоуля –Ленца, выделяемое в обмотке якоря и на внутреннем сопротивлении источника. Чтобы в момент пуска обмотка якоря не сгорела, последовательно с ней включают реостат, сопротивление которого постепенно уменьшают по мере раскручивания ротора. При раскручивания ротора ток в его обмотке будет уменьшаться за счет появления в ней E_i .

б) Момент на валу двигателя

Очевидно, что суммарный вращающий момент на валу пропорционален току в обмотке якоря (для одного витка вращающий момент равен $M = IBS \cos \alpha$).

$$M = kI. \quad (10)$$

Коэффициент пропорциональности зависит от индукции магнитного поля статора, геометрии ротора, количества рамок, уложенных в пазы ротора.

Сила тока в обмотке якоря определяется законом Ома (7)

$$I = \frac{E - E_t}{R + r}.$$

Максимальный ток в обмотке якоря, как было показано выше, будет в момент пуска двигателя, этот ток равен

$$I_{\max} = \frac{E}{R + r}.$$

В момент пуска вращающий момент сил Ампера максимален

$$M_{\max} = kI_{\max} = \frac{kEk}{R + r}.$$

Если момент внешних сил превосходит максимальный момент сил Ампера, ротор начинает раскручиваться в противоположную сторону, из режима двигателя машина переходит в режим работы генератора.

в) Скорость вращения ротора двигателя

В стационарном режиме момент сил Ампера уравновешен моментом внешних сил, и ротор вращается с постоянной скоростью ω .

Развиваемая двигателем мощность равна

$$P = M\omega,$$

где M – момент сил Ампера на валу, уравновешенный моментом внешних сил;

ω – угловая скорость вращения якоря.

Мощность двигателя можно найти из закона сохранения энергии (9)

$$Edq = I^2 R dt + I^2 r dt + E_c dq$$

$$A_{ист} = Q_R + Q_r + \Delta E_k.$$

Разделив обе части уравнения на время, получаем соотношение между мощностями

$$P_{ист} = P_{тепл} + P_{мех}$$

$$EI = I^2 (R + r) + P_{мех}.$$

Мощность двигателя равна

$$P_{\text{мех}} = EI - I^2(R+r) = \frac{ME}{k} - \frac{M^2(R+r)}{k^2}. \quad (11)$$

Подставим в полученное выражение значение $P = M\omega$ и найдем скорость вращения якоря

$$M\omega = \frac{ME}{k} - \frac{M^2(R+r)}{k^2}$$

$$\omega = \frac{E}{k} - \frac{M(R+r)}{k^2}.$$

Нетрудно видеть, что скорость вращения ротора зависит от внешней нагрузки. При увеличении нагрузки на валу скорость ротора линейно убывает (рисунок 2.14).

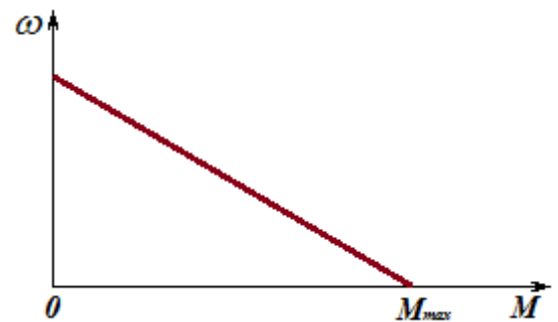


Рисунок 2.14

Если внешняя нагрузка окажется равной M_{max} , ротор останавливается, ЭДС индукции не возникает и вся энергия источника преобразуется в тепло. Обмотка якоря может сгореть. По этой причине двигатель нельзя нагружать так, чтобы внешняя нагрузка была близка к максимальному моменту сил Ампера.

2) Механическая мощность двигателя

Как было показано выше, механическая мощность двигателя, работающего в стационарном режиме, зависит от внешней нагрузки на валу (9):

$$P_{\text{мех}} = \frac{ME}{k} - \frac{M^2(R+r)}{k^2}.$$

Видим, что режимы недогруженного двигателя и режим нагрузки, близкой к предельной, одинаково невыгодны. Механическая мощность двигателя в этих режимах близка к нулю. Практически вся энергия источника тратится на нагрев обмотки якоря (рисунок 2.15).

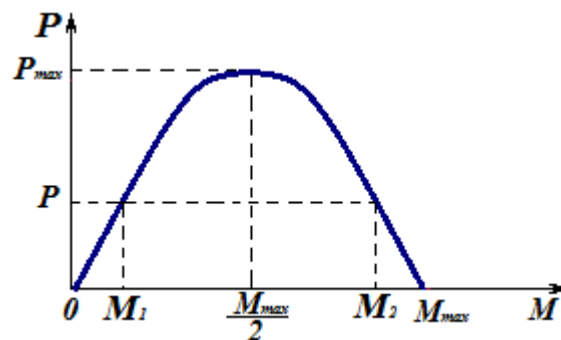


Рисунок 2.15

Максимальная мощность развивается двигателем, когда внешняя нагрузка равна половине максимального момента сил Ампера.

$$P_{max} = \frac{ME}{k} - \frac{M^2(R+r)}{k^2} = \frac{kE}{2(R+r)} \cdot \frac{E}{k} - \left(\frac{kE}{2(R+r)} \right)^2 \frac{(R+r)}{k^2} = \frac{E^2}{4(R+r)}.$$

Одну и ту же мощность двигатель может развивать при двух разных нагрузках на валу. Какой из этих режимов работы энергетически выгоднее?

д) КПД двигателя

Коэффициент полезного действия характеризует эффективность преобразования энергии.

$$\eta = \frac{\Delta E_{полезн.}}{\Delta E_{затрач.}}$$

Полезно преобразованная энергия – это механическая работа, совершаемая двигателем. Затраченная энергия может быть рассчитана как работа источника.

$$\eta = \frac{P_{\text{мех}}}{P_{\text{источника}}} = \frac{P_{\text{источника}} - P_{\text{тепловая}}}{P_{\text{источника}}} = 1 - \frac{I^2(R+r)}{EI} = 1 - \frac{I(R+r)}{E}.$$

Выразив силу тока через момент на валу, получаем для КПД двигателя:

$$\eta = 1 - \frac{M(R+r)}{kE}.$$

При максимальной мощности двигателя его КПД составляет всего лишь 50% - понятно, что такой режим работы энергетически не выгоден. Из двух внешних нагрузок, при которых двигатель развивает одинаковую мощность энергетически выгоднее режим меньшей нагрузки (рисунок 2.16).

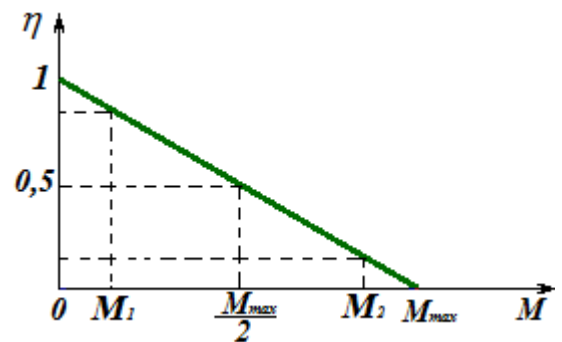


Рисунок 2.16

2 Пусть в цепи отсутствует источник тока. Тем не менее, ток в цепи есть, поскольку в движущемся стержне возникает ЭДС индукции. В этом случае *система работает как генератор* (рисунок 2.17).

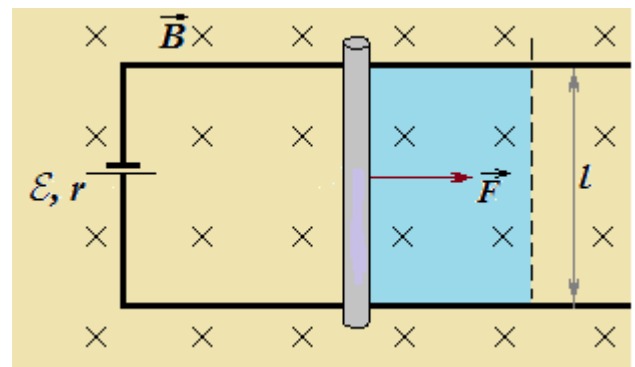


Рисунок 2.17

Роль сторонних сил играет сила Лоренца, действующая на электроны в движущемся стержне. По определению ЭДС – это величина, численно равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура

$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q}$. Однако, сила Лоренца работу не совершает, поскольку она всегда

перпендикулярна скорости! Откуда берется тепло Джоуля - Ленца, выделяемое при протекании тока?

Стержень самостоятельно двигаться не будет. Для того, чтобы стержень пришел в движение, на него должна действовать сила \vec{F} , по меньшей мере равна силе Ампера, тормозящей движение. Выражение (6) в этом случае примет вид

$$A_F = Q_R.$$

Видим, что за счет работы внешней силы механическая энергия преобразуется в электрическую, а затем в тепловую.

При вращении рамки в магнитном поле в ней возникает синусоидальная ЭДС, которая вызывает появление в рамке синусоидального тока.

Чтобы получить постоянный ток, используют полукольца и щетки. Одна рамка, вращающаяся в магнитном поле, становится источником пульсирующего тока одного направления (рисунок 2.18).

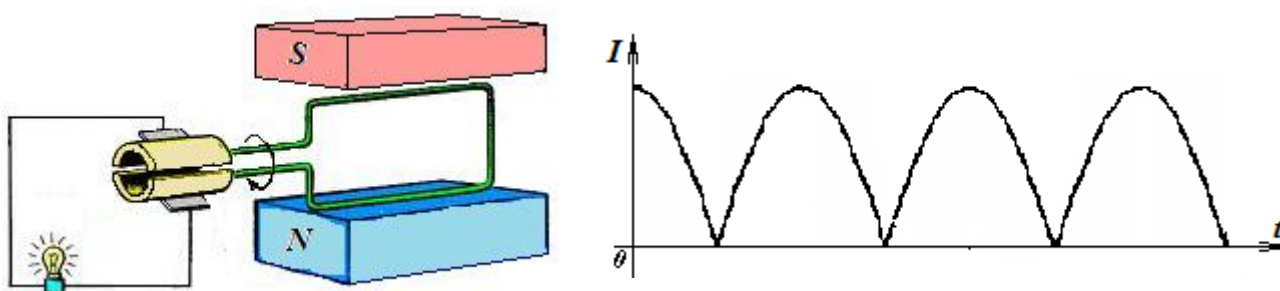


Рисунок 2.18

Сглаживание пульсаций результирующей ЭДС и тока достигается использованием большего числа рамок, расположенных в разных плоскостях. Например, в случае вращения двух взаимно перпендикулярных рамок, выводы которых заканчиваются четвертью кольца, получаем (рисунок 2.19):

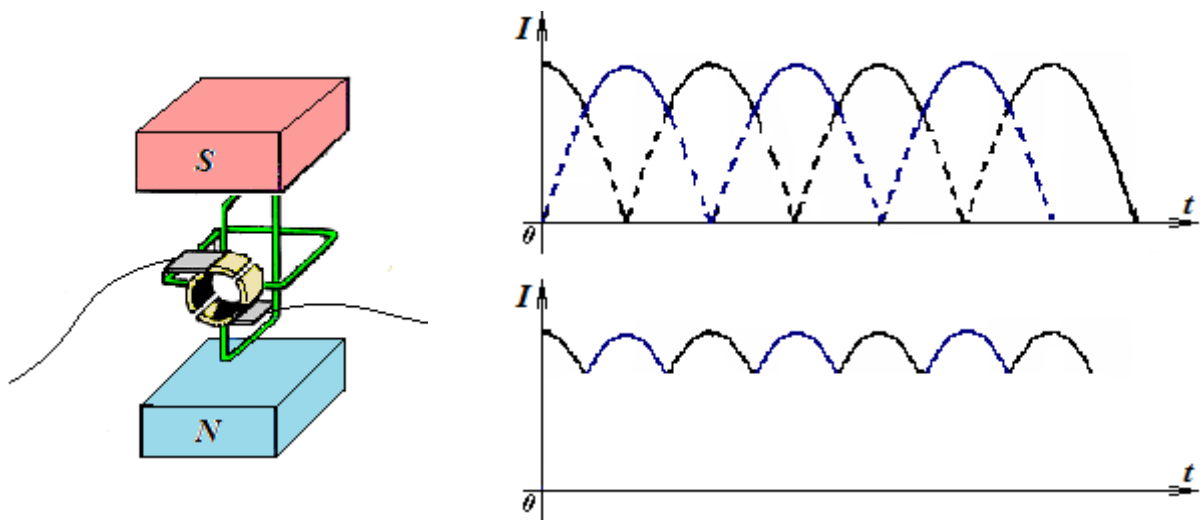


Рисунок 2.19

Четыре рамки, расположенные под углами 45° друг к другу дают еще менее пульсирующий ток (рисунок 2.20).

Понятно, что значение ЭДС индукции E_i , возникающая при вращении большого числа рамок, близка по значению к максимальному значению ЭДС, возникающей в одной рамке. Как было показано $E_i = BS\omega$, где ω – угловая скорость вращения якоря.

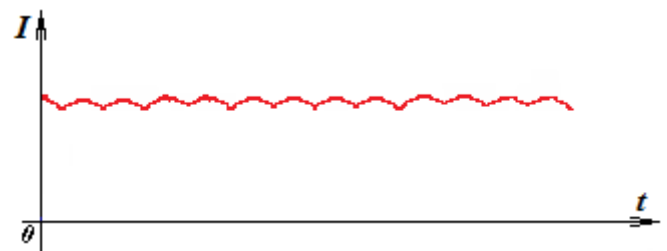


Рисунок 2.20

§2 Примеры решения задач

1 Мощность и КПД двигателя

Электродвигатель питается от батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В. Какую мощность развивает двигатель при протекании по его обмотке тока $I = 2$ А, если при полном затормаживании якоря по нему течет ток $I_0 = 3$ А? Чему равен КПД двигателя, работая в таком режиме? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

При заторможенном якоре ЭДС индукции в его обмотке не возникает. Закон Ома принимает вид $E = I_0 R_{\text{я}}$.

В рабочем режиме энергия источника преобразуется в механическую энергию и тепло в обмотке якоря:

$$P_{\text{источника}} = P_{\text{мех}} + P_{\text{тепловая}}.$$

Выражаем сопротивление якоря через пусковой ток и находим механическую мощность двигателя

$$P_{\text{мех}} = P_{\text{источника}} - P_{\text{тепловая}} = EI - I^2 R = EI - I^2 \frac{E}{I_0}.$$

$$P_{\text{мех}} = 12 \cdot 2 - 2^2 \cdot \frac{12}{3} = 8 \text{ (Вт)}.$$

$$\text{КПД двигателя } \eta = \frac{P_{\text{мех}}}{P_{\text{источника}}} = \frac{P_{\text{мех}}}{EI} = \frac{8}{12 \cdot 2} = 0,33.$$

2 Обратимость машины постоянного тока

Электромотор постоянного тока, включенный в цепь батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$, при полном сопротивлении цепи 20 Ом и силе тока $0,2 \text{ А}$ делает 600 об/мин . Какую ЭДС разовьет мотор, работая в качестве генератора при той же частоте вращения ротора? при частоте 1500 об/мин ?

При работе машины в качестве двигателя энергия источника преобразуется в механическую энергию и тепло в обмотке якоря:

$$P_{\text{источника}} = P_{\text{мех}} + P_{\text{тепловая}}.$$

Преобразование электрической энергии в механическую происходит за счет возникновения в обмотке якоря ЭДС индукции $P_{\text{мех}} = E_{\text{I}} I$.

$$EI = I^2R + E_1 I$$

$$E_1 = E - IR = 24 - 0,2 \cdot 20 = 8 \text{ (В)}.$$

ЭДС индукции, возникающая в обмотке якоря, прямо пропорциональна угловой скорости, а значит и частоте, вращения якоря и не зависит от режима работы машины. При одинаковой частоте вращения в режиме двигателя и в режиме генератора ЭДС индукции в обмотке якоря одинакова.

При частоте вращения $n_1 = 600$ об/мин ЭДС индукции равна $E_{11} = 8 \text{ В}$. При частоте вращения ротора $n_2 = 1500$ об/мин ЭДС индукции увеличивается пропорционально частоте $E_{12} = E_{11} \cdot \frac{n_2}{n_1} = 8 \cdot \frac{1500}{600} = 20 \text{ (В)}$.

3 Частота вращения ротора двигателя

На горизонтальный вал мотора наматывается нитка, на которой подвешен груз массой $m = 0,8$ кг. Мотор питается от батареи аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E} = 12$ В и сопротивлением $r = 0,4$ Ом. Сопротивление обмотки якоря $R_{\text{я}} = 3$ Ом. Сколько оборотов в минуту делает якорь, если по его обмотке течет ток силой $I = 3,3$ А? Радиус вала $a = 0,5$ см. Грузы какой массы может поднимать этот двигатель?

Механическая мощность двигателя может быть рассчитана двумя способами. При вращательном движении $P_{\text{мех}} = M\omega$, где M – момент сил Ампера, уравновешивающий момент внешней силы, ω – угловая скорость вращения якоря.

Внешняя сила, создающая вращающий момент, – это сила натяжения нити. При равномерном вращении якоря сила натяжения равна силе тяжести, тогда вращающий момент равен $M = mga$. Угловая скорость связана с частотой вращения $\omega = 2\pi n$. Тогда мощность двигателя равна

$$P_{\text{мех}} = mga \cdot 2\pi n.$$

С другой стороны, механическая мощность может быть найдена на основании закона сохранения энергии

$$P_{\text{источника}} = P_{\text{мех}} + P_{\text{тепловая}}$$

$$P_{\text{мех}} = P_{\text{источника}} - P_{\text{тепловая}} = EI - I^2(R_{\text{я}} + r).$$

Приравниваем значения мощности, найденные двумя способами

$$mga \cdot 2\pi n = EI - I^2(R_{\text{я}} + r).$$

Частота вращения ротора равна

$$n = \frac{EI - I^2(R_{\text{я}} + r)}{2\pi mga}. \quad (12)$$

$$n = \frac{EI - I^2(R_{\text{я}} + r)}{2\pi mga} = \frac{12 \cdot 3,3 - 3,3^2(3 + 0,4)}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,8 \cdot 9,8 \cdot 0,005} = 10,5 \quad (\text{об/с}).$$

Момент внешней силы $M = mga$ не может превышать максимального значения

$$M < M_{\text{max}} = kI_{\text{max}} = \frac{kEk}{R + r}$$

$$m_{\text{дон}}ga < \frac{kEk}{R + r}$$

$$m_{\text{дон}} < \frac{kEk}{ga(R + r)},$$

где $m_{\text{дон}}$ - допустимая масса груза, которую может поднимать мотор.

Коэффициент пропорциональности k между током и моментом на валу найдем, зная ток при подъеме груза массой $m = 0,8$ кг:

$$kI = mga \Rightarrow k = \frac{mga}{I}.$$

$$\text{Допустимая масса груза } m_{\text{дон}} < \frac{kE\kappa}{ga(R+r)} = \frac{mgaE}{Iga(R+r)} = \frac{mE}{I(R+r)}.$$

$$m_{\text{дон}} < \frac{0,8 \cdot 12}{3,3 \cdot (3 + 0,4)}$$

$$m_{\text{дон}} < 0,855 \text{ кг}$$

§3 Задания для самоконтроля

Тест «Машины постоянного тока»

1 Какое устройство предназначено для преобразования электрической энергии в механическую энергию?

- А) трансформатор;
- Б) двигатель;
- В) генератор;
- Г) коллектор;

2 Какое устройство предназначено для преобразования механической энергии в электрическую энергию?

- А) трансформатор;
- Б) двигатель;
- В) генератор;
- Г) коллектор.

3 Принцип действия генератора постоянного тока основан на

- А) действию силы Ампера на проводник с током в магнитном поле;
- Б) возникновении ЭДС индукции в контуре при изменении пронизывающего его магнитного потока;

В) выделении тепла Джоуля – Ленца в проводнике при протекании по нему тока;

Г) существовании магнитного поля вокруг проводника с током.

4 Принцип действия двигателя постоянного тока основан на

А) действии силы Ампера на проводник с током в магнитном поле;

Б) возникновении ЭДС индукции в контуре при изменении пронизывающего его магнитного потока;

В) выделении тепла Джоуля – Ленца в проводнике при протекании по нему тока;

Г) существовании магнитного поля вокруг проводника с током.

5 Неподвижная часть машины постоянного тока называется

А) ротором; Б) статором; В) коллектором; Г) реле.

6 Подвижная часть машины постоянного тока называется

А) якорем; Б) статором; В) коллектором; Г) щетками.

7 Коллектор в машине постоянного тока предназначен для

А) увеличения мощности двигателя;

Б) обеспечения равномерности вращения ротора;

В) изменения направления тока в рамке при прохождении ею положения равновесия;

Г) уменьшения потерь энергии на тепло Джоуля – Ленца.

8 Для чего обмотка якоря выполняется из толстого медного провода?

А) для увеличения мощности двигателя;

- Б) для обеспечения равномерности вращения ротора;
- В) для изменения направления тока в рамке при прохождении ею положения равновесия;
- Г) для уменьшения потерь энергии на тепло Джоуля – Ленца.

9 Для чего в пазы ротора укладывается большое число рамок?

- А) для увеличения мощности двигателя;
- Б) для обеспечения равномерности вращения ротора;
- В) для увеличения КПД двигателя;
- Г) для уменьшения потерь энергии на тепло Джоуля – Ленца.

10 Для чего рамки ротора укладываются под углами друг к другу?

- А) для увеличения мощности двигателя;
- Б) для обеспечения равномерности вращения ротора;
- В) для увеличения КПД двигателя;
- Г) для увеличения ЭДС индукции, возникающей в обмотке якоря.

Тест «Двигатель постоянного тока»

1 За счет чего в двигателе постоянного тока происходит преобразование электрической энергии в механическую?

- А) за счет малого сопротивления обмотки якоря;
- Б) за счет возникновения ЭДС индукции в рамках ротора при его вращении;
- В) за счет постоянства магнитного поля, создаваемого током в обмотке статора;
- Г) за счет малого сопротивления источника тока, питающего обмотку якоря.

2 В какой момент ток в обмотке якоря максимален?

- А) при прохождении рамками положения равновесия;
- Б) при максимальной нагрузке на валу двигателя;
- В) в момент включения двигателя;
- Г) в момент выключения двигателя.

3 Что происходит с частотой вращения якоря при увеличении момента внешних сил на валу двигателя?

- А) увеличивается; Б) уменьшается; В) не изменяется;
- Г) ответ зависит от изменения тока в обмотке якоря.

4 Что произойдет с КПД двигателя при увеличении момента внешних сил на валу двигателя?

- А) увеличится; Б) уменьшится; В) не изменится;
- Г) ответ зависит от изменения тока в обмотке якоря.

5 Двигатель развивает одинаковую мощность при подъеме грузов массами 5 кг и 20 кг. В каком случае КПД двигателя больше?

- А) при подъеме груза массой 5 кг;
- Б) при подъеме груза массой 20 кг;
- В) КПД двигателя не зависит от массы поднимаемого груза;
- Г) Данных не достаточно, чтобы дать ответ на вопрос.

6 Чему равен КПД двигателя, если в момент пуска сила тока в обмотке якоря равна 15 А, а в установившемся режиме ток снижается до 9 А?

- А) 40 %; Б) 60 %; В) 67 %; Г) 100 %.

7 Чем опасна остановка якоря двигателя?

- А) Двигатель перестает потреблять энергию от источника;
- Б) Вся энергия источника преобразуется в тепло на внутреннем сопротивлении источника и он выходит из строя;
- В) Тепловая мощность в обмотке якоря становится максимальной, она может сгореть;
- Г) Остановка якоря не представляет опасности для двигателя.

8 Как изменить направление вращения якоря?

- А) изменить направление тока в обмотке якоря;
- Б) Изменить направление тока в обмотке статора или якоря;
- В) Одновременно изменить направление тока в обмотках статора и якоря;
- Г) Направление вращения якоря определяется его конструктивными особенностями, его изменить не возможно.

9 При силе тока 2 А двигатель развивает мощность 200 Вт. Какую ЭДС разовьет этот двигатель, работая в качестве генератора при той же частоте вращения якоря?

- А) 50 В; Б) 100 В; В) 200 В;
- Г) Данных задачи не достаточно для того, чтобы дать ответ.

10 Какую силу тяги развивает троллейбусный двигатель ДПТ – 110, если он работает от номинального напряжения 550 В? При силе тока 200 А скорость троллейбуса 36 км/ч. Потерями на нагрев обмотки якоря пренебречь.

- А) ≈ 3 кН; Б) ≈ 11 кН; В) ≈ 1100 кН; Г) ≈ 3960 кН.

Задачи для самостоятельного решения

1 Электродвигатель, включенный в сеть с напряжением 120 В, развивает полезную мощность 1,47 кВт. Используя мотор в качестве генератора, при той же скорости вращения якоря, что и в первом случае, можно получить ЭДС 80 В. Чему равно сопротивление якоря?

2 Электрический двигатель при напряжении 120 В развивает мощность 160 Вт, делая 100 об/мин. Каким будет максимальное число оборотов двигателя при этом напряжении, если сопротивление обмотки якоря 20 Ом и двигатель развивает ту же мощность? Какое число оборотов разовьет этот двигатель при холостом ходе?

3 Какую ЭДС развивает генератор постоянного тока, если при сопротивлении цепи 300 Ом на вращение ротора затрачивается мощность 50 Вт, а потери на трение составляют 4 % от затраченной мощности? Какую мощность для поддержания того же числа оборотов необходимо затрачивать при сопротивлении цепи 60 Ом?

4 Работая в качестве электродвигателя, мотор постоянного тока при напряжении 120 В делает 100 об/мин при силе тока 20 А. С какой скоростью нужно вращать якорь мотора, чтобы, работая как генератор, он давал напряжение 80 В? Какую механическую мощность нужно при этом подводить к генератору? Полное сопротивление цепи в обоих случаях равно 5 Ом.

Глава 3 Самоиндукция

§1 Явление самоиндукции

Самоиндукция – частный случай явления электромагнитной индукции, когда магнитный поток, пронизывающий контур, создается током в самом контуре.

Рассмотрим катушку, по которой течет ток. Каждый виток катушки пронизывается своим собственным магнитным полем и магнитными полями соседних витков (рисунок 3.1).

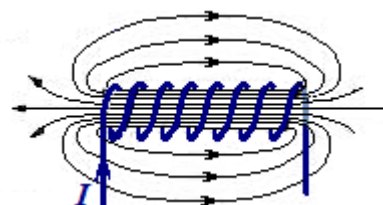


Рисунок 3.1

Пусть ток в катушке увеличивается. Индукция магнитного поля $B = \mu_0 \mu n I$ тоже увеличивается. Меняющееся магнитное поле создает вихревое электрическое поле, силовые линии которого показаны на рисунке 3.2.

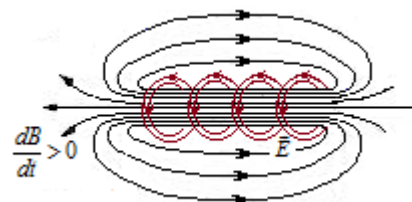


Рисунок 3.2

В соответствии с правилом Ленца напряженность вихревого электрического поля должна быть направлена так, чтобы препятствовать нарастанию магнитного поля, а значит, препятствовать нарастанию создающему его току $\vec{E} \uparrow \downarrow I$. Итак, ток в катушке нарастает медленно, для увеличения тока требуется время.

Если ток в катушке уменьшается, индукция магнитного поля $B = \mu_0 \mu n I$ тоже уменьшается. Убывающее магнитное поле создает вихревое электрическое поле, силовые линии которого показаны на рисунке 3.3. В соответствии с правилом

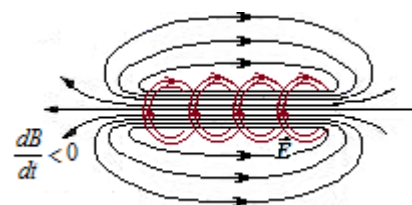


Рисунок 3.3

Ленца вихревое электрическое поле теперь препятствует уменьшению тока и создаваемого им магнитного поля. Вихревое электрическое поле поддерживает убывающий ток, не дает ему уменьшиться мгновенно.

Подведем итог.

Самоиндукция – это явление возникновения ЭДС индукции в замкнутом контуре при изменении тока в нем.

Самоиндукции проявляется в том, что ток проводнике не может измениться мгновенно – для изменения тока требуется время. Аналогом самоиндукции в механике является инертность. Инертность – свойство тел, заключающееся в том, что скорость тела не может измениться мгновенно, для изменения скорости требуется время.

Явление самоиндукции легко пронаблюдать на установке, изображенной на рисунке 3.4. В одну из параллельных ветвей включен резистор, в другую – катушка с таким же омическим сопротивлением. Индикаторами наличия тока в ветвях служат одинаковые лампочки L_1 и L_2 .

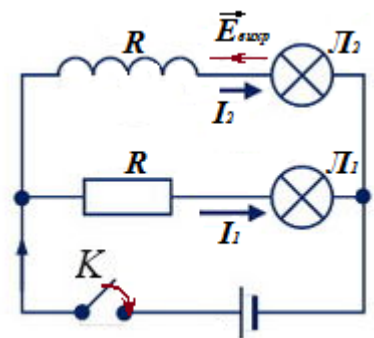


Рисунок 3.4

При замыкании цепи токи в ветвях должны нарастать. Однако в ветви с катушкой появляется вихревое электрическое поле, препятствующее нарастанию тока I_2 . Лампочка L_2 загорается позже, чем L_1 .

При размыкании цепи токи в ветвях должны уменьшиться до нуля. Однако в ветви с катушкой вихревое электрическое поле поддерживает убывающий ток. Поскольку источник тока уже отключен, ток, текущий через L_2 , теперь будет замыкаться через ветвь с лампой L_1 . После размыкания цепи обе лампы будут гореть некоторое время и погаснут одновременно (рисунок 3.5).

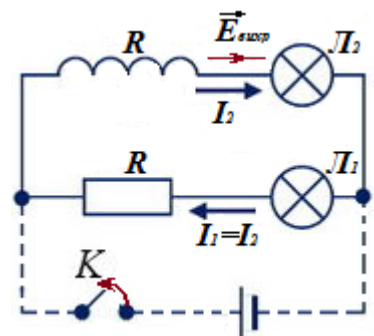


Рисунок 3.5

§2 Индуктивность проводника

Энергетическая характеристика вихревого электрического поля – ЭДС индукции. В рассматриваемом случае эту ЭДС называют ЭДС самоиндукции. Необходимо выяснить, от чего зависит ЭДС самоиндукции.

Согласно закону Фарадея

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Магнитный поток прямо пропорционален индукции магнитного поля $\Phi = BS \cos \alpha$. Магнитная индукция, в свою очередь, всегда прямо пропорциональна силе тока $B \propto I$ независимо от формы тока. Таким образом, магнитный поток, пронизывающий контур, прямо пропорционален току в этом контуре $\Phi \propto I$.

Введем коэффициент пропорциональности $\Phi = LI$. Коэффициент пропорциональности L не зависит ни от силы тока I в контуре, ни от пронизывающего его магнитного потока Φ . Коэффициент пропорциональности L называют индуктивностью проводника, эта величина зависит от самого проводника: формы и размеров контура, вещества, заполняющего контур.

Для примера рассчитаем индуктивность длинного соленоида. Соленоид (катушка) считается длинным, если его диаметр много меньше длины $d \ll L$. В этом случае поле внутри соленоида можно считать однородным.

Если в катушке N витков, то полный магнитный поток, (потокосцепление), пронизывающий катушку, равен $\Phi = N\Phi_1$, где Φ_1 – магнитный поток, пронизывающий один виток.

По определению магнитный поток, пронизывающий контур, равен $\Phi_1 = BS \cos \alpha$. Вектор магнитной индукции внутри катушки перпендикулярен плоскости каждого витка, следовательно, $\cos \alpha = 1$. Индукция магнитного

поля внутри длинного соленоида $B = \mu_0 \mu n I$. Для полного магнитного потока, пронизывающего катушку, получаем

$$\Phi = NBS = N\mu_0 \mu n IS.$$

Число витков на единицу длины n выразим через общее число витков в катушке N и ее длину l : $n = \frac{N}{l}$.

Окончательно для магнитного потока получаем $\Phi = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} \cdot I$.

Коэффициент пропорциональности между током и магнитным потоком - это и есть индуктивность длинного соленоида.

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}.$$

Индуктивность соленоида зависит от густоты намотки витков (числа витков на единицу длины), наличия железного сердечника.

Находим ЭДС самоиндукции

$$E_{si} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - I\frac{dL}{dt}. \quad (13)$$

Как видно из выражения (13) ЭДС самоиндукции может возникать в контуре по двум причинам: либо в контуре изменяется ток, либо изменяется

индуктивность проводника (например, можно вносить или выносить железный сердечник из катушки).

Индуктивность проводника изменять трудно, по этой причине чаще приходится сталкиваться с возникновением ЭДС индукции при изменении тока и неизменной индуктивности проводника. В этом случае

$$E_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (14)$$

ЭДС самоиндукции прямо пропорциональна скорости изменения тока в проводнике.

Выражение (14) позволяет ввести единицу измерения индуктивности.

$$[L] = \left[\frac{\text{В}}{\text{А/с}} = 1 \text{ Гн} \right].$$

1 генри (Гн) – это индуктивность такого проводника, в котором возникает ЭДС самоиндукции в 1 Вольт при равномерном убывании тока на 1 Ампер за 1 секунду.

§3 Экстратоки замыкания и размыкания цепи с индуктивностью

Размыкание цепи с индуктивностью

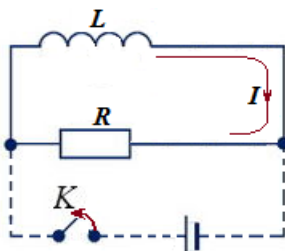


Рисунок 3.6

Как было показано раньше, после размыкания цепи по катушке индуктивности некоторое время протекает ток – он поддерживается ЭДС самоиндукции (рисунок 3.6). Выясним, как этот ток зависит от времени $I = f(t)$.

Для контура, содержащего резистор R и катушку индуктивности L , записываем второй закон Кирхгофа

$$IR = E_{si}$$

$$IR = -L \frac{dI}{dt}$$

Решаем дифференциальное уравнение, разделяя переменные

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt.$$

Интегрируем левую и правую части уравнения с учетом того, что за время t ток изменяется от начального значения I_0 до какого-то I (рисунок 3.7).

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt$$

$$\ln I \Big|_{I_0}^I = -\frac{R}{L} t \Big|_0^t$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t$$

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} t}.$$

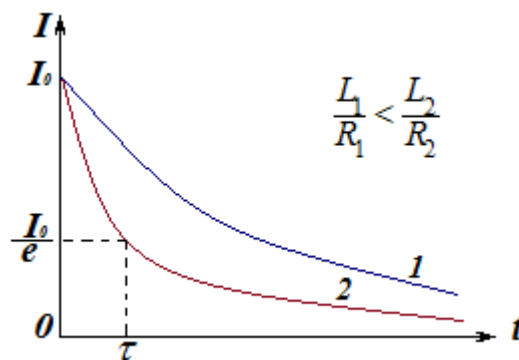


Рисунок 3.7

После размыкания цепи ток через катушку убывает по экспоненте. Быстрота убывания тока зависит от индуктивности катушки L и сопротивления R . Характерное время $\tau = \frac{L}{R}$ – время уменьшения тока в e раз. Нетрудно видеть, что ток убывает тем медленнее, чем больше индуктивность катушки L и меньше сопротивление R .

Экстраток размыкания может быть опасным при размыкании цепей, содержащих большие индуктивности (рисунок 3.8). За счет экстратока размыкания на клеммах рубильника накапливаются большие

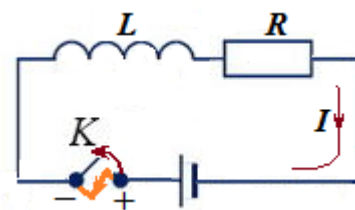


Рисунок 3.8

заряды – рубильник искрит. Для того, чтобы рубильник не искрил, последовательно с большой индуктивностью включают реостат, с помощью которого медленно уменьшают ток в цепи при необходимости обесточить катушку.

*Замыкание цепи с индуктивностью**

Выясним, как изменяется ток при замыкании цепи, содержащей индуктивность L и сопротивление R (рисунок 3.9).

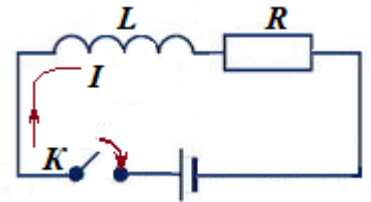


Рисунок 3.9

Запишем второй закон Кирхгофа и преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
 IR &= E + E_{si} \\
 IR &= E - L \frac{dI}{dt} \\
 L \frac{dI}{dt} &= E - IR.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Введем новую переменную $y = E - IR \Rightarrow dy = -R \cdot dI$. После замены переменных уравнение (15) принимает вид

$$-\frac{L}{R} \cdot \frac{dy}{dt} = y.$$

Решаем уравнение, разделяя переменные

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{y} &= -\frac{R}{L} \cdot dt \\
 \int \frac{dy}{y} &= -\frac{R}{L} \cdot \int dt \\
 y &= y_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}
 \end{aligned}$$

Возвращаемся к исходным переменным

$$E - IR = y_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$IR = E - y_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Значение постоянной y_0 находим из начальных условий: в начальный момент времени (сразу после замыкания ключа) ток в цепи отсутствовал $I(0) = 0$.

$$0 \cdot R = E - y_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0}$$

$$y_0 = E \dots \dots \dots$$

Зависимость тока от времени принимает вид

$$I(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Чем больше индуктивность катушки L и меньше сопротивление R , тем нарастание тока происходит медленнее. В установившемся режиме по цепи течет постоянный ток, ЭДС индукции в катушке не возникает (рисунок 3.10).

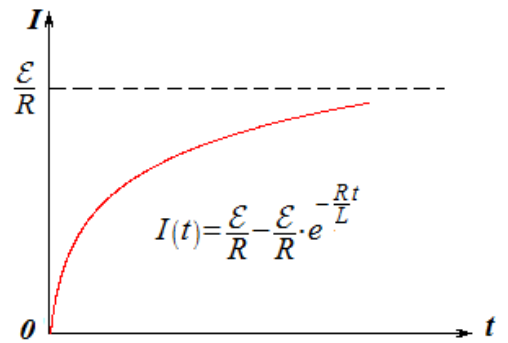


Рисунок 3.10

§4 Энергия магнитного поля

При размыкании цепи (смотри рисунок 3.9) по контуру, содержащему катушку и резистор продолжает течь ток. Протекание тока сопровождается выделением тепла Джоуля – Ленца на резисторе. Согласно закону сохране-

ния энергия никуда не исчезает, она только превращается из одного вида в другой. Выделение тепла на резисторе означает, что до размыкания цепи катушка с током обладала энергией. Найдем значение этой энергии.

Записываем закон Ома для контура, содержащего катушку и резистор. После размыкания цепи ток в катушке убывает, это приводит к появлению в катушке ЭДС самоиндукции:

$$IR = E_{si}$$
$$IR = -L \frac{dI}{dt}.$$

Умножим обе части уравнения на $I dt$

$$IR \cdot I dt = -L \frac{dI}{dt} \cdot I dt$$
$$I^2 R dt = -L I dI.$$

Правая часть уравнения - тепло, выделившееся в резисторе за малый интервал времени dt

$$dQ = -L I dI.$$

Чтобы найти все тепло, выделившееся за время убывания тока от I_0 до нуля, проинтегрируем левую и правую части уравнения

$$\int_0^Q dQ = -L \int_{I_0}^0 IdI$$

$$Q = -\left(0 - \frac{LI^2}{2}\right)$$

$$Q = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Очевидно, что энергия катушки с током, перешедшая в тепло после размыкания цепи, равна $W = \frac{LI^2}{2}$.

Эта энергия сосредоточена в магнитном поле катушки. При убывании тока до нуля магнитное поле исчезает, его энергия преобразуется в тепло Джоуля – Ленца на резисторе.

Плотностью энергии магнитного поля называют величину $w = \frac{dW}{dV}$ - это энергия, заключенная в единице объема. Плотность энергии легко определить для поля длинного соленоида. Поскольку это поле однородное, достаточно разделить энергию соленоида с током на объем соленоида

$$w = \frac{W}{V} = \frac{LI^2}{2lS},$$

где l – длина соленоида;

S – площадь сечения соленоида.

Выразим индуктивность соленоида через его параметры $L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}$:

$$w = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l} \cdot \frac{I^2}{2lS} = \frac{\left(\mu_0 \mu \frac{N}{l} I\right)^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{(\mu_0 \mu n I)^2}{2\mu_0 \mu}.$$

Величина в скобках – индукция магнитного поля внутри длинного соленоида $B = \mu_0 \mu n I$. Выражение для расчета плотности энергии магнитного поля принимает вид

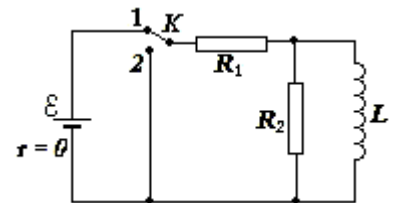
$$w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

§5 Примеры решения задач

Задача 1 Размыкание цепи, содержащей катушку индуктивности

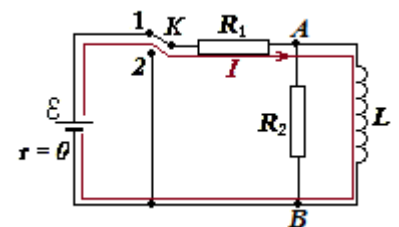
(ЕГЭ - 2009, базовый уровень)

Какое количество теплоты выделится на резисторе R_2 в схеме, изображенной на рисунке, после перемещения ключа K из положения 1 в положение 2.



Решение

В установившемся режиме, когда ключ находится в положении 1, ток через резистор R_2 не течет. Почему? При параллельном соединении больший ток течет в ветвь с меньшим сопротивлением, а поскольку омическое сопротивление у катушки отсутствует, весь ток, дошедший до узла A , пойдет через катушку.



Этот же факт можно объяснить иначе. Запишем для ветви, содержащей катушку индуктивности, закон Ома для неоднородного участка цепи

$$I R_{\text{катушки}} = (\varphi_A - \varphi_B) + E_{si}.$$

Сопротивление катушки $R_{\text{катушки}} = 0$, в установившемся режиме ток в цепи постоянный, следовательно, ЭДС самоиндукции $E_{si} = -L \frac{dI}{dt} = 0$. Тогда

$$I \cdot 0 = (\varphi_A - \varphi_B) + 0$$

$$0 = (\varphi_A - \varphi_B).$$

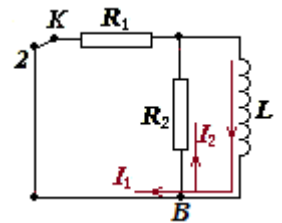
Разность потенциалов или напряжение на резисторе R_2 равна нулю, значит, согласно закону Ома для однородного участка цепи ток через резистор R_2 отсутствует.

Ток в контуре до перебрасывания ключа равен $I = \frac{E}{R_1}$.

Энергия магнитного поля катушки до перебрасывания ключа

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{LE^2}{2R_1^2}.$$

Сразу после перебрасывания ключа в положение 2 по катушке будет продолжать течь ток в прежнем направлении.



В узле B ток, текущий через катушку, будет делиться на две части – часть тока пойдет в резистор R_1 , другая часть пойдет через резистор R_2 . В цепи будет существовать ток до тех пор, пока энергия магнитного поля катушки не перейдет в тепло Джоуля – Ленца.

$$Q = W = \frac{LE^2}{2R_1^2}$$

Это тепло выделится на резисторах R_1 и R_2 :

$$Q_1 + Q_2 = Q = W = \frac{LE^2}{2R_1^2}. \quad (16)$$

Найдем отношение количеств теплоты, выделившихся на резисторах. За малое время dt изменением токов через резисторы можно пренебречь, следовательно, тепло, выделившееся на каждом резисторе за малое время dt , равно:

$$dQ_1 = I_1^2 R_1 dt = \frac{U^2}{R_1} dt$$

$$dQ_2 = I_2^2 R_2 dt = \frac{U^2}{R_2} dt.$$

Отношение количеств теплоты, вылившихся за малое время dt , не зависит от времени $\frac{dQ_1}{dQ_2} = \frac{R_2}{R_1}$. Значит, и за все время протекания тока по цепи

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (17)$$

Решаем уравнения (16) и (17) совместно:

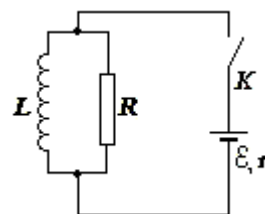
$$\begin{cases} Q_1 = \frac{R_2}{R_1} \cdot Q_2 \\ Q_1 + Q_2 = \frac{LE^2}{2R_1^2} \end{cases}$$

$$\frac{R_2}{R_1} \cdot Q_2 + Q_2 = \frac{LE^2}{2R_1^2}.$$

$$Q_2 = \frac{LE^2}{2R_1^2} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{LE^2}{2R_1(R_1 + R_2)}.$$

Задача 2 Переходный процесс в цепи, содержащей катушку индуктивности (Козел, 3.181, углубленный уровень)

Параллельно соединенные катушка индуктивности L и резистор сопротивлением R подключены через ключ K к батарее с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . В начальный момент времени ключ K разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд протечет через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебечь.

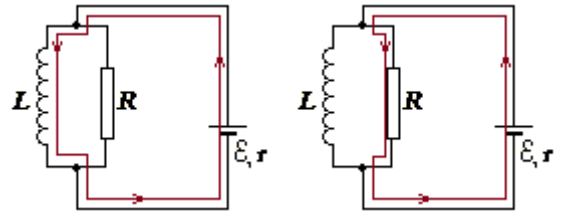


Решение

Сразу после замыкания ключа тока в катушке индуктивности не будет $I_{\text{ок}} = 0$, поскольку мгновенному нарастанию тока в катушке препятствует

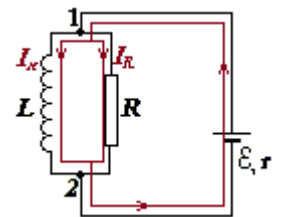
ЭДС самоиндукции. Весь ток сразу после замыкания ключа пойдет в ветвь с резистором.

Катушка не обладает омическим сопротивлением. Поэтому в установившемся режиме весь ток пойдет в ветвь с катушкой, ибо при параллельном соединении больший ток идет в ветвь с меньшим сопротивлением.



Установившийся ток в катушке равен $I_{\kappa} = \frac{E}{r}$.

В процессе установления тока в цепи разность потенциалов на концах резистора и катушки была одинакова - они соединены параллельно. Для процесса установления тока записываем закон Ома для каждой ветви.



Резистор – однородный участок цепи, следовательно,

$$I_R \cdot R = (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (18)$$

Катушка – неоднородный участок цепи, следовательно,

$$I_{\kappa} \cdot R_{\kappa} = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{si}.$$

Поскольку сопротивление катушки равно нулю $R_{\kappa} = 0$, последнее уравнение принимает вид

$$0 = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{si}. \quad (19)$$

Решаем совместно уравнения (18) и (19):

$$\begin{aligned} I_R \cdot R &= -E_{si} \\ I_R \cdot R &= L \frac{dI_{\kappa}}{dt}. \end{aligned}$$

По определению сила тока равна $I_R = \frac{dq}{dt}$, где dq - заряд, прошедший через резистор за малое время dt .

$$\frac{dq}{dt} \cdot R = L \frac{dI_{\kappa}}{dt}$$

$$dq = \frac{L}{R} dI_{\kappa},$$

где dq – заряд, проходящий через резистор при изменении тока в катушке на dI_{κ} .

Просуммировав (проинтегрировав) правую и левую части уравнения, получаем

$$\int_0^q dq = \frac{L}{R} \int_0^{\frac{E}{r}} dI_{\kappa}$$

$$q = \frac{LE}{Rr}.$$

Примечание: интегрирование можно заменить операцией суммирования.

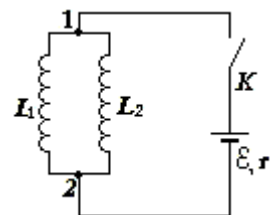
$$\Sigma dq = \frac{L}{R} \Sigma dI$$

$$q = \frac{L}{R} \left(\frac{E}{r} - 0 \right)$$

$$q = \frac{LE}{Rr}.$$

Задача 3 Переходный процесс в цепи, содержащей две катушки индуктивности

Две катушки индуктивностями L_1 и L_2 подключены к источнику с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . Определите установившиеся токи в катушках после замыка-



ния ключа. Сопротивлением катушек пренебречь.

Решение

Сразу после замыкания ключа ток в катушках и в цепи в целом отсутствует, ибо мгновенному нарастанию тока в катушках препятствуют ЭДС самоиндукции.

В установившемся режиме ток в неразветвленной части

цепи равен $I = \frac{E}{r}$. Доходя до узла, ток I делится на две

части

$$I = I_1 + I_2 \quad (20)$$

В процессе установления тока в цепи разность потенциалов на концах катушек была одинакова - они соединены параллельно. Для процесса установления тока записываем закон Ома для каждой ветви (участок, содержащий катушку, является неоднородным участком цепи):

$$\begin{cases} I_1 \cdot R_1 = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{si1} \\ I_2 \cdot R_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{si2} \end{cases}$$

Поскольку сопротивлением катушек можно пренебречь, уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} 0 = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{si1} \\ 0 = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{si2} \end{cases}$$

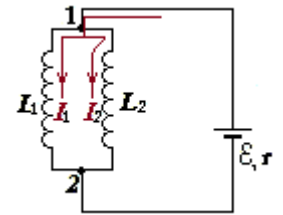
Следовательно, $E_{si1} = E_{si2}$

$$\begin{aligned} -L_1 \frac{dI_1}{dt} &= -L_2 \frac{dI_2}{dt} \\ L_1 \cdot dI_1 &= L_2 \cdot dI_2. \end{aligned}$$

Проводим операцию суммирования (интегрирования):

$$L_1 \cdot I_1 = L_2 \cdot I_2. \quad (21)$$

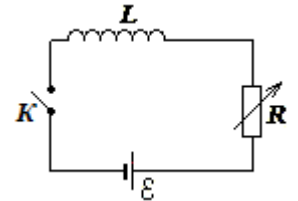
Решаем совместно уравнения (20) и (21):



$$I_1 = \frac{E L_2}{r(L_1 + L_2)} \quad I_2 = \frac{E L_1}{r(L_1 + L_2)}.$$

Задача 4 Цепь с изменяющимися параметрами (МФТИ, 1997)

Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС E , катушки индуктивности L и переменного сопротивления, начальное значение которого R_0 . Через некоторое время после замыкания ключа K напряжение на катушке равно U_0 . Начиная с этого момента времени, сопротивление R меняется таким образом, что напряжение на катушке остается постоянным и равным U_0 .



- 1) Определить напряжение на катушке сразу после замыкания ключа.
- 2) Найдите зависимость сопротивления от времени.

Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.

Решение

Определимся с тем, что понимать под напряжением на катушке. Запишем для участка цепи, содержащего катушку закон Ома для неоднородного участка цепи

$$I \cdot R_k = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{si}.$$

Поскольку сопротивление катушки равно нулю $R_k = 0$, уравнение принимает вид $0 = (\varphi_1 - \varphi_2) + E_{si}$. Разность потенциалов или напряжение на катушке равно

$$U_L = (\varphi_1 - \varphi_2) = -E_{si}.$$

Сразу после замыкания ключа ток в последовательной цепи с индуктивностью равен нулю. Второй закон Кирхгофа, записанный для этого момента времени, имеет вид

$$\begin{aligned}I \cdot R &= E + E_{si} \\ 0 &= E + E_{si}.\end{aligned}$$

Напряжение на катушке сразу после замыкания ключа равно

$$U_L(0) = -E_{si} = E.$$

В момент размыкания ключа второй закон Кирхгофа принимает вид

$$\begin{aligned}I_0 \cdot R_0 &= E + E_{si} \\ I_0 \cdot R_0 &= E - U_0 \\ I_0 &= \frac{E - U_0}{R_0}.\end{aligned}$$

При изменении сопротивления R напряжение на катушке неизменно, следовательно, ЭДС самоиндукции в катушке неизменна

$$U_0 = -E_{si} = L \frac{dI}{dt} = const.$$

Из полученного уравнения находим зависимость силы тока в цепи от времени

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L} \quad \Rightarrow \quad dI = \frac{U_0}{L} \cdot dt.$$

Интегрируем левую и правую части уравнения – за время t ток изменится от I_0 до I :

$$\int_{I_0}^I dI = \frac{U_0}{L} \int_0^t dt$$

$$I - I_0 = \frac{U_0}{L} \cdot t$$

$$I = I_0 + \frac{U_0}{L} \cdot t = \frac{E - U_0}{R_0} + \frac{U_0}{L} \cdot t.$$

Зависимость сопротивления от времени находим из второго закона Кирхгофа

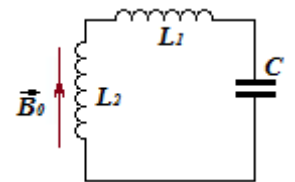
$$I \cdot R = E + E_{si}$$

$$I \cdot R + U_0 = E$$

$$\left(\frac{E - U_0}{R_0} + \frac{U_0}{L} \cdot t \right) \cdot R + U_0 = E$$

$$R = \frac{E - U_0}{\frac{E - U_0}{R_0} + \frac{U_0}{L} \cdot t} = \frac{R_0}{1 + \frac{U_0 R_0}{(E - U_0) L} \cdot t}.$$

Задача 5 В колебательном контуре, включающем в себя конденсатор емкостью C и две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 , происходят гармонические колебания. Катушка L_2 с числом витков N и площадью одного витка S расположена в однородном и стационарном магнитном поле с индукцией B_0 , перпендикулярной плоскости витков. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе достигнет максимального значения U_0 , магнитное поле выключают. Время спада магнитного поля много меньше периода колебаний в контуре. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и подводящих проводов, определите величину максимального тока в контуре после выключения магнитного поля.



Решение

В момент, когда напряжение на конденсаторе максимально, его заряд $q_0 = CU_0$ тоже максимален. Сила тока в контуре в этот момент равна нулю ($I = \frac{dq}{dt}$, а в точках максимума или минимума функции производная равна нулю). Магнитный поток, пронизывающий катушку L_2 , равен $\Phi_0 = B_0SN$.

Сразу после быстрого выключения магнитного поля магнитный поток должен остаться прежним. Этот поток теперь будет создаваться током, текущим по катушкам (поскольку катушки соединены последовательно, ток в них должен быть одинаковым).

$$B_0SN = IL_1 + IL_2.$$

Сразу после исчезновения внешнего магнитного поля в цепи появляется ток $I = \frac{B_0SN}{(L_1 + L_2)}$. Заряд на конденсаторе за время спадания магнитного поля не успевает измениться. Энергия колебательной системы в этот момент равна

$$W_0 = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{L_1 I^2}{2} + \frac{L_2 I^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2}.$$

В тот момент, когда ток в контуре примет максимальное значение, ЭДС самоиндукции в катушках обратится в ноль ($E_{si} = -L \frac{dI}{dt}$ - производная в точках максимума равна нулю). Следовательно, напряжение на конденсаторе и его заряд в этот момент равны нулю. Энергия колебательной системы в этот момент складывается из энергий магнитных полей в катушках L_1 и L_2 .

$$W = \frac{(L_1 + L_2) I_{\max}^2}{2}.$$

Поскольку энергия колебательного контура не меняется $W = W_0$.

$$\frac{(L_1 + L_2)I_{\max}^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{(L_1 + L_2)I^2}{2}$$

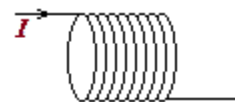
$$I_{\max} = \sqrt{I^2 + \frac{CU_0^2}{L_1 + L_2}} = \sqrt{\left(\frac{B_0 SN}{L_1 + L_2}\right)^2 + \frac{CU_0^2}{L_1 + L_2}}$$

§6 Задания для самоконтроля

Тест «Самоиндукция»

1 В катушке нарастает ток. Как направлен вектор напряженности вихревого электрического поля \vec{E} в проводнике, из которого накручена катушка?

- А) вектор \vec{E} сонаправлен току в проводнике;
- Б) вектор \vec{E} направлен против тока в проводнике;
- В) вихревое электрическое поле в этом случае не возникает;
- Г) данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.



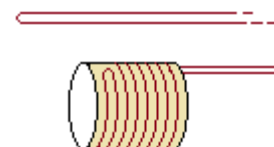
2 В катушке убывает ток. Как направлен вектор напряженности вихревого электрического поля \vec{E} в проводнике, из которого накручена катушка?

- А) вектор \vec{E} сонаправлен току в проводнике;
- Б) вектор \vec{E} направлен против тока в проводнике;
- В) вихревое электрическое поле в этом случае не возникает;
- Г) данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.



3 Провод сложили вдвое и намотали на железный сердечник. В получившейся катушке увеличивают ток. Как направлен вектор напряженности вихревого электрического поля \vec{E} в проводнике, из которого накручена катушка?

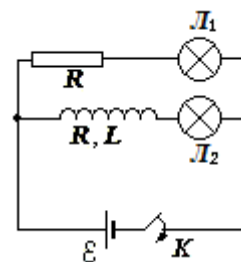
- А) вектор \vec{E} сонаправлен току в проводнике;
- Б) вектор \vec{E} направлен против тока в проводнике;



- В) вихревое электрическое поле в этом случае не возникает;
 Г) данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.

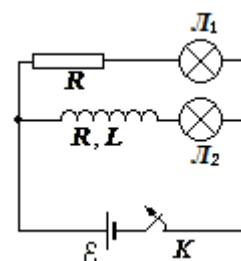
4 Ключ замыкают. Какая лампа загорится раньше?

- А) L_1 ; Б) L_2 ;
 В) Обе лампы загорятся одновременно;
 Г) Ответ зависит от ЭДС источника.



5 Ключ размыкают. Какая лампа погаснет раньше?

- А) L_1 ; Б) L_2 ;
 В) Обе лампы загорятся одновременно;
 Г) Ответ зависит от ЭДС источника.



6 Какое механическое явление может служить аналогом явления самоиндукции?

- А) Равнозамедленное движение;
 Б) Движение тела по инерции;
 В) Инертность тела;
 Г) Движение тела в вязкой среде.

7 Как рассчитать ЭДС самоиндукции в общем случае?

- А) $\mathcal{E}_{si} = L \frac{dI}{dt}$;
 Б) $\mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}$;
 В) $\mathcal{E}_{si} = -\frac{d(LI)}{dt}$;
 Г) $\mathcal{E}_{si} = -I \frac{dL}{dt}$.

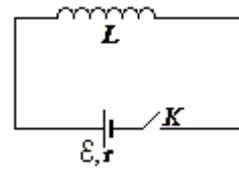
8 Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа K ?

A) $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$;

Б) $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$;

В) $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$;

Г) $I = 0$.



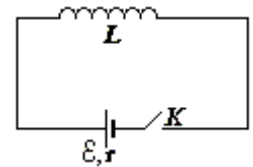
9 В цепи, изображенной на рисунке, протекал ток в установившемся режиме. Чему равен ток в цепи сразу после *размыкания* ключа *K*?

A) $I = \frac{\mathcal{E}}{r}$;

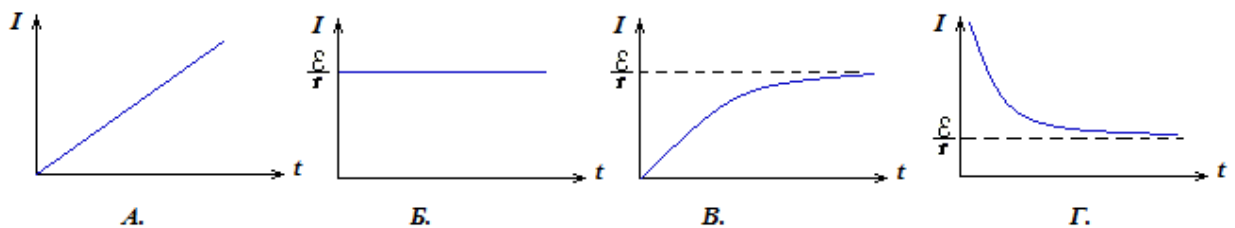
Б) $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$;

В) $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$;

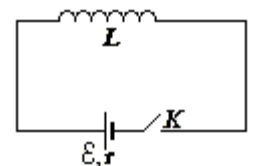
Г) $I = 0$.

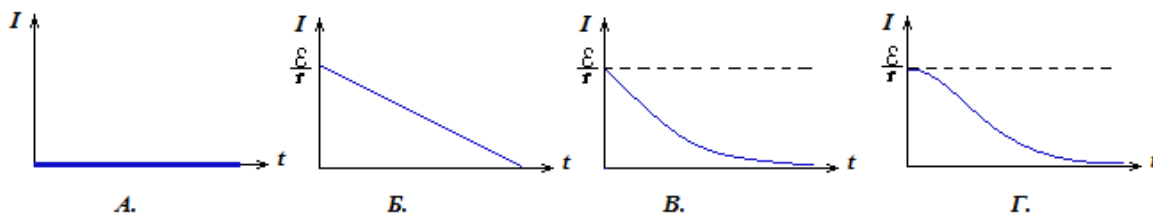


10 В цепи, изображенной на рисунке, *закрывают* ключ *K*. На каком рисунке правильно показана зависимость тока в цепи от времени?

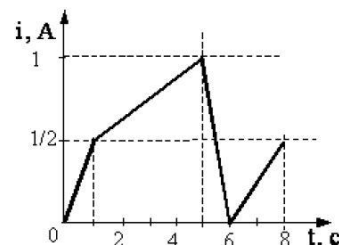


11 В цепи, изображенной на рисунке, протекал ток в установившемся режиме. *Ключ размыкают*. На каком рисунке правильно показана зависимость тока в цепи от времени?





12 На рисунке приведен график зависимости силы тока i в катушке индуктивности от времени t . Модуль ЭДС самоиндукции принимает **наименьшее** значение в промежутке времени

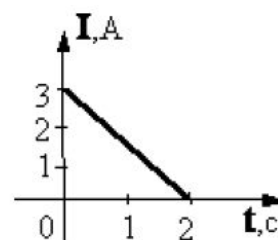


- А) (0 – 1) с; Б) (1 – 5) с; В) (5 – 6) с; Г) (6 – 8) с.

13 Сила тока, протекающего через катушку индуктивностью 0,06 Гн, равномерно возрастает на 0,3 А за каждую секунду. Чему равна по модулю ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке?

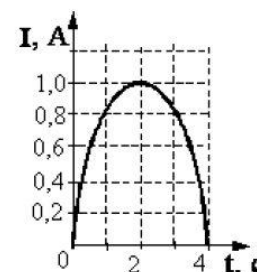
- А) 0,2; Б) 5 В; В) 18 В; Г) 18 мВ.

14 На рисунке представлен график изменения силы тока с течением времени в катушке индуктивностью $L = 6$ мГн. ЭДС самоиндукции равна



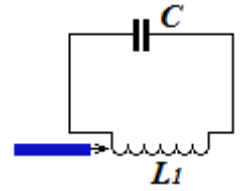
- А) 36 мВ; Б) 9 мВ; В) 6 мВ; Г) 4 мВ.

15 На рисунке показано изменение силы тока I в катушке индуктивности от времени t . Модуль ЭДС самоиндукции принимает наименьшее значение в промежутках времени



- 1) 0 – 1 с и 2 – 3 с; 2) 1 – 2 с и 2 – 3 с;
3) 0 – 1 с и 3 – 4 с; 4) 2 – 3 с и 3 – 4 с.

16 В цепи, изображенной на рисунке, протекал ток I_0 . В катушку быстро (в сравнении с периодом колебаний в контуре) вносят железный сердечник, что приводит к увеличению индуктивности катушки в μ раз. Чему равен ток в цепи сразу после внесения сердечника?



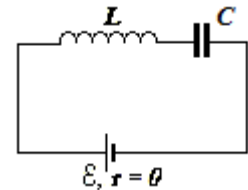
- А) $I = \frac{I_0}{\mu}$; Б) $I = \mu I_0$; В) $I = \frac{E}{r}$;

Г) Данных задачи не достаточно, чтобы дать ответ.

17 В электрической цепи, изображенной на рисунке, происходят гармонические колебания. Чему равен заряд конденсатора в тот момент, когда ток в цепи принимает максимальное значение?

- А) $q = 0$; Б) $q = C\varepsilon$;

- В) $q = \frac{\varepsilon}{C}$; Г) $q = \frac{C}{\varepsilon}$.



18 Индуктивность катушки увеличили в 2 раза, а силу тока в ней уменьшили в 2 раза. Энергия магнитного поля катушки при этом

- А) увеличилась в 8 раз;
 Б) уменьшилась в 2 раза;
 В) уменьшилась в 8 раз;
 Г) уменьшилась в 4 раза.

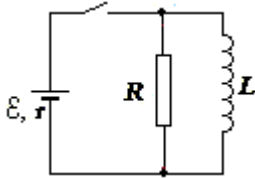
19 Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

- А) $Q = 0$;

Б) $Q = \frac{L\mathcal{E}^2}{2r^2};$

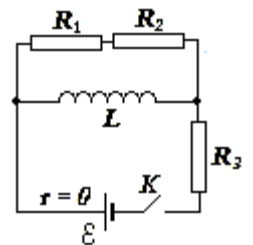
В) $Q = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2};$

Г) $Q = \frac{L\mathcal{E}^2}{2(R+r)^2}.$



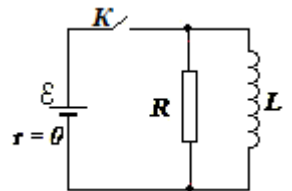
Задачи для самостоятельного решения

1 В электрической схеме ключ к сначала замкнут. После размыкания ключа на резисторе R_1 выделяется количество теплоты Q_1 . Какое количество теплоты выделилось на резисторе R_2 ? Чему равна ЭДС батареи?



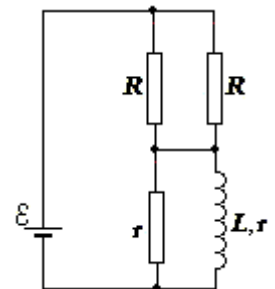
Сопротивления R_1, R_2, R_3 и индуктивность катушки L известны.

2 В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а потом размыкают. Оказалось, что за время, пока ключ был замкнут, через катушку протек заряд q_0 .

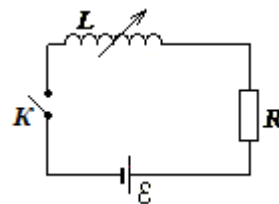


- 1) Найдите ток в катушке непосредственно перед размыканием ключа.
- 2) Какой заряд протек через резистор после размыкания ключа?

3 В схеме, изображенной на рисунке, ключ K сначала разомкнут. Катушка индуктивности обладает омическим сопротивлением r . Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением перемычки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.



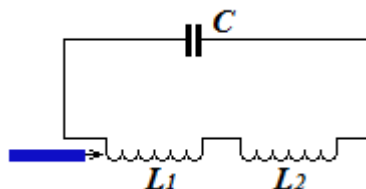
4 Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС \mathcal{E} , сопротивления R и катушки переменной индуктивности, начальное значение которой L_0 . Через некоторое время после замыкания ключа K на катушке падает напряжение U_0 . Начиная с этого момента времени, индуктивность катушки L меняется таким образом, что напряжение на катушке остается постоянным и равным U_0 .



- 1) Определить напряжение на катушке сразу после замыкания ключа.
- 2) Найдите зависимость индуктивности катушки от времени.

Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.

5 В колебательном контуре, состоящем из двух последовательно соединенных катушек с индуктивностями L_1 и L_2 и конденсатора емкостью C , происходят свободные незатухающие колебания, при которых амплитуда тока равна I_0 . Когда сила тока в катушке L_1 максимальна, в нее быстро (за время, малое в сравнении с периодом колебаний в контуре) вставляют сердечник, что приводит к увеличению ее индуктивности в μ раз.



- 1) Определите максимальное значение напряжения на конденсаторе до вставки сердечника.
- 2) Определите максимальное напряжение на конденсаторе до вставки сердечника.

1 Калашников, С.Г. Электричество /С.Г.Калашников – М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 624 с. – ISBN 5 – 9221 – 0312 – 1.

2 Евсюков, А.А. Электротехника: Учебное пособие для студентов физ.спец. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1979. – 248 с. - ISBN 5 – 283 - 01032 - 5.

3 Сборник задач по физике: Для 10-11 кл. с углубл. изуч. физики / Под. ред. С.М. Козела. – 3 –е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 2001. – 264 с. - ISBN 5 – 010630 - 4.

4 Кингсен, А.С. Основы физики. Курс общей физики: В 2 т. Т 1. Механика, электричество магнетизм, колебания и волны, волновая оптика / А.С.Кингсен., Г.Р.Локшин, О.А. Ольхов О.А. - М: ФИЗМАТЛИТ, 2001, - 560 с. – ISBN 5 – 9221 – 0164 – 1.