Математический аппарат при решении физических задач. Использование методологических принципов в обучении школьников решению задач

Арифуллин Марсель Равшанович,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры биофизики и физики конденсированного состояния

- **Графические методы решения задач по физике**
- **Баллистика и оптимизация**
- **Математический анализ в физике**
- **Использование методологических принципов**

1. Графические методы решения задач по физике

- ЧТО ТАКОЕ ГРАФИК?

График – это чертѐж, на котором наглядно, при помощи линий и других графических элементов показаны какие-либо числовые данные. График – чертеж, изображающий при помощи кривых количественные показатели развития, состояния чего-либо. Графики широко используют при решении задач по физике. Например, в задачах на движение ускорение и скорость можно определить по тангенсу угла наклона прямой, а пройденный путь и изменение скорости по площади фигуры под графиком.

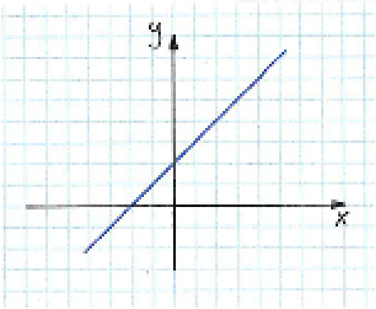
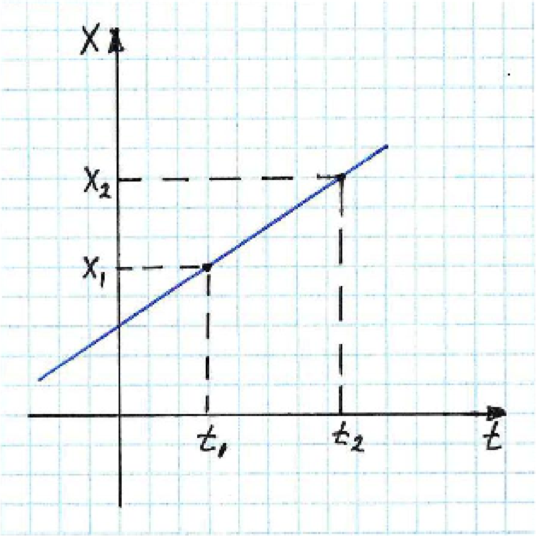


Рисунок 1. Прямая в декартовой системе координат

$$y = kx + b$$

$$x = kt + x_0$$

- Изменением координаты тела за промежуток времени от момента t1 до момента t2 называют разность x2 – x1 между конечным и начальным значением координаты.



$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Отсюда можно сделать несколько важных выводов: чем «круче» будет идти график, тем больше будет скорость движения тела, так как за одно и тоже время у тела «сильнее» изменилась координата (Рисунок 3);

если график параллелен оси абсцисс, то его координата не меняется, значит тело покоится (Рисунок 4);

если график направлен вниз, то разность координат будет отрицательная, а это значит, тело возвращается, то есть движется в обратном направлении (Рисунок 4).

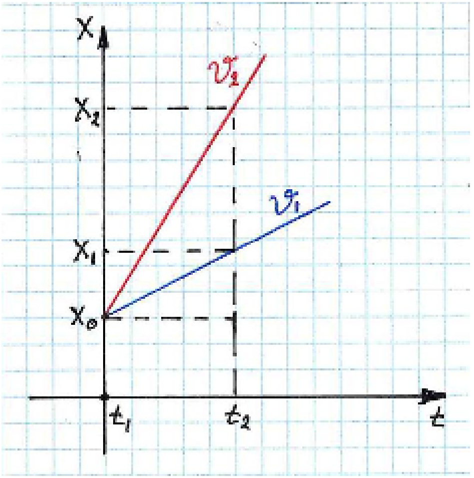
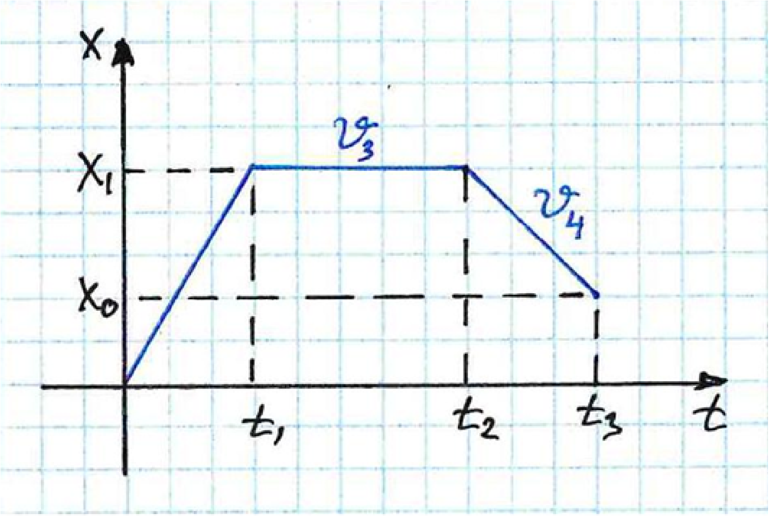


Рисунок 3. Различие изменения координат, при движении с разной скоростью

$$v_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_2 - t_1}$$

$$v_2 = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_1} \div \frac{x_1 - x_0}{t_2 - t_1} = \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} > 1$$



$$v_3 = \frac{x_1 - x_1}{t_2 - t_1} = \mathbf{0}$$

$$v_4 = \frac{x_0 - x_1}{t_3 - t_2} < 0 \qquad \text{так как } x_0 < x_1$$

Состояние покоя и движение в обратном направлении

1. задача о встречном движении двух тел. Задача заключается в том, чтобы определить, где произойдет встреча и когда, то есть, через какое время после начала движения тел, она состоится.

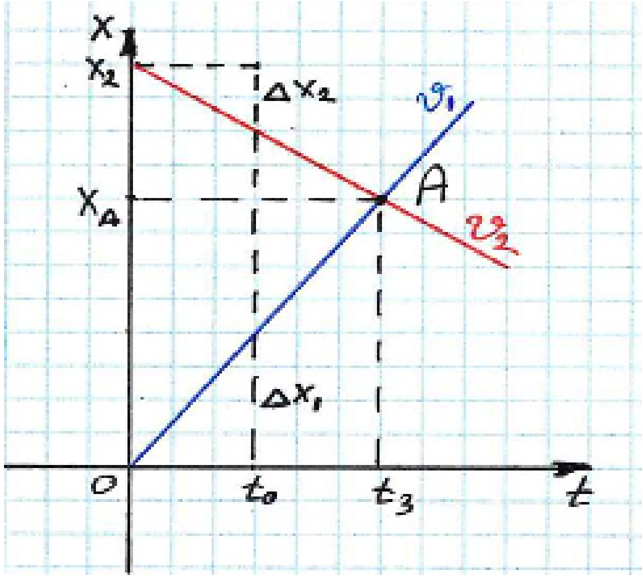


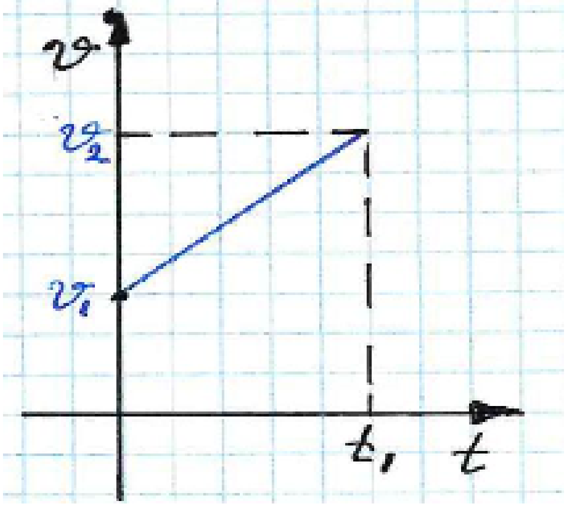
Рисунок 5. Встречное движение двух тел вдоль одной прямой

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{S_2 - S}{t} \\ v_2 = \dfrac{S_2}{t} \end{cases}$$

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{S}{t}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{v_1 + \frac{S}{t}}{v_1} = 1 + \frac{S}{v_1 t}$$

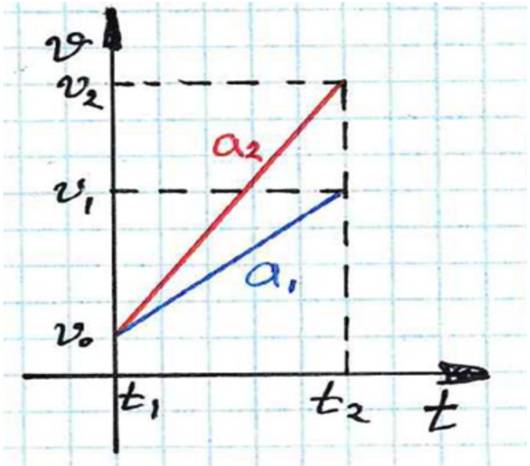
Рассмотрим теперь равноускоренное движение



Зависимость скорости от времени при равноускоренном движении

$$v = kt + v_0$$

Следовательно: чем «круче» будет идти график, тем больше будет ускорение тела, так как за одно и тоже время у тела «сильнее» изменилась скорость если график параллелен оси абсцисс, то его скорость тела не меняется, значит, тело движется равномерно; если график направлен вниз, то разность скоростей будет отрицательная, а это значит, что тело уменьшает свою скорость, то ускорение отрицательное



$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_2 - t_1}$$

$$a_2 = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - t_1}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{v_2 - v_0}{t_2 - t_1} \div \frac{v_1 - v_0}{t_2 - t_1} = \frac{v_2 - v_0}{v_1 - v_0} > 1$$

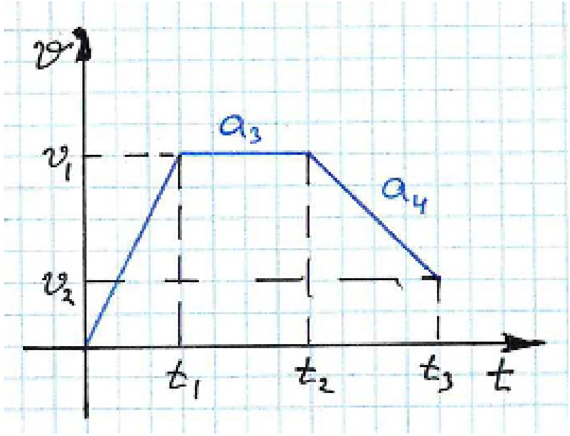


Рисунок 16. Движение с постоянной скоростью и замедление

$$a_3 = \frac{v_1 - v_1}{t_2 - t_1} = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$a_4 = \frac{v_2 - v_1}{t_3 - t_2} < 0 \qquad \text{так как } v_2 < v_1$$

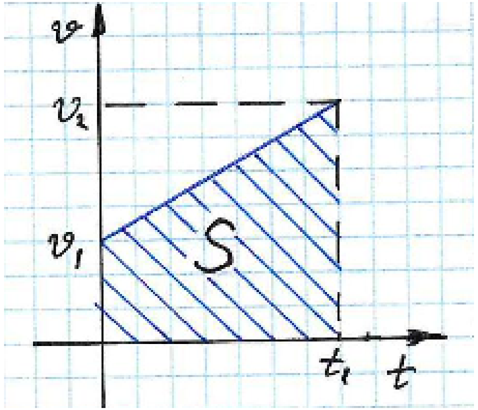


Рисунок 17. Нахождение пройденного пути, как площади трапеции

$$S = \frac{v_1 + v_2}{2} t$$

$$S = v_1 t + \frac{at^2}{2}$$

$$S = v_2 t - \frac{at^2}{2}$$

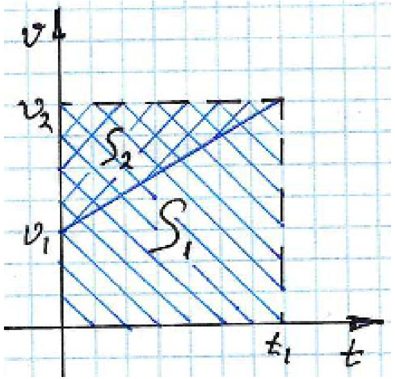


Рисунок 19. Нахождение пройденного пути, как разность площадей

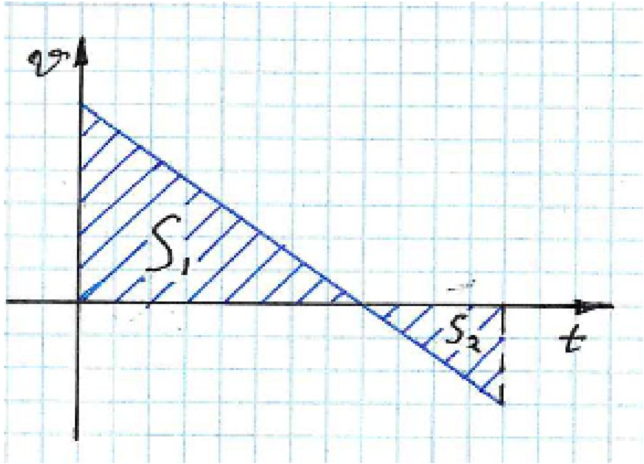


Рисунок 20. График зависимости скорости от времени при изменении направления движения

Пройденный путь

$$S = S_1 + S_2,$$

Перемещение же тела

$$S = S_1 - S_2,$$

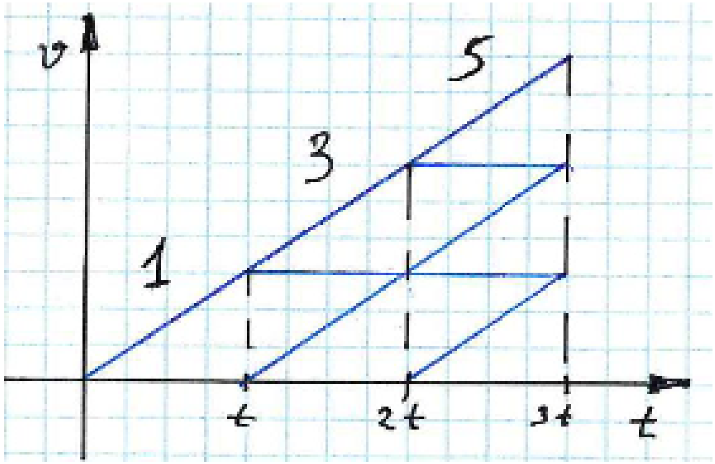


Рисунок 21. Отношение расстояния пройденного телом при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью

$$S_1:S_2:S_3\ldots=1:3:5\ldots$$

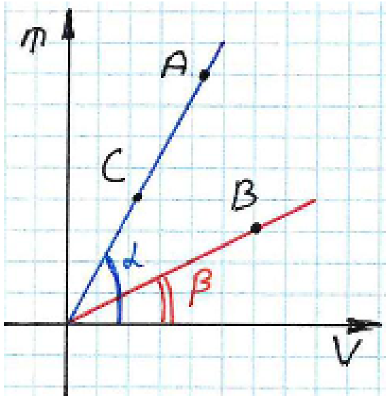


Рисунок 23а. График зависимости массы от объема

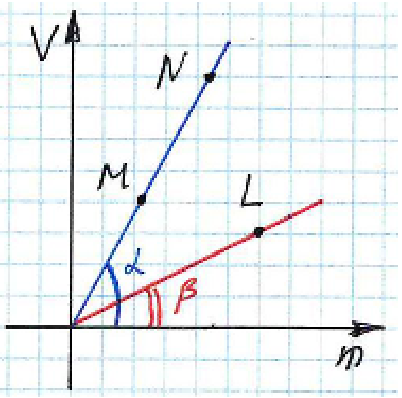


Рисунок 23а. График зависимости объема от массы

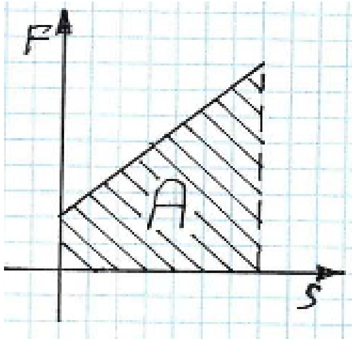


Рисунок 24. График зависимости приложенной силы от координаты

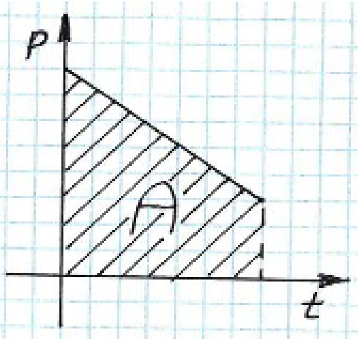


Рисунок 25. График зависимости мощности от времени

$$A=Fs\ ($$

$$A = Pt$$

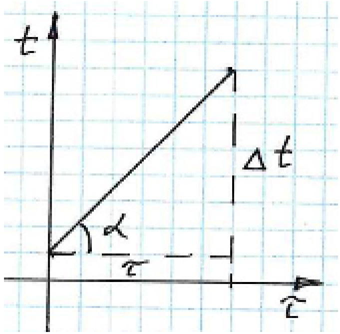
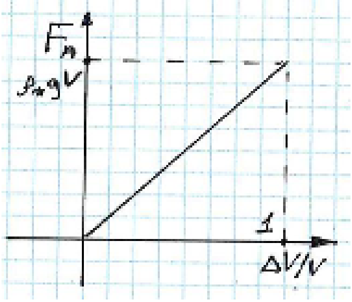


Рисунок 26. График зависимости температуры тела от времени

$$P\tau = cm\Delta t$$

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{P}{m}\frac{1}{c}$$



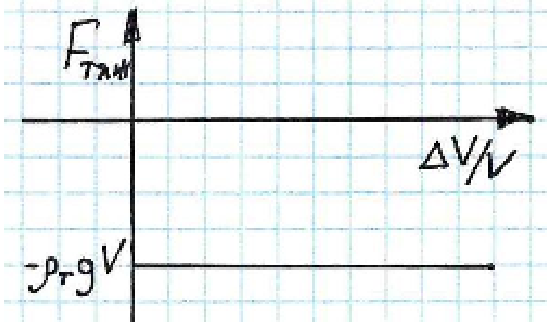


Рисунок 27. Зависимость силы Архимеда от объема, погруженной в жидкость части

Рисунок 28. Зависимость силы тяжести от объема, погруженной в жидкость части тела

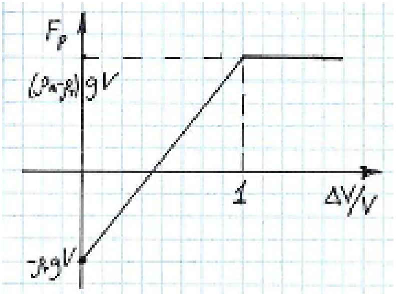


Рисунок 29а. Зависимость результирующей силы от объема погруженного тела, в случае, когда плотность тела меньше плотности жидкости

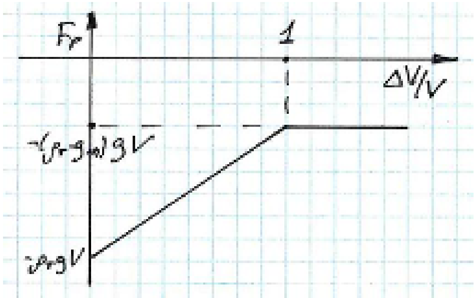
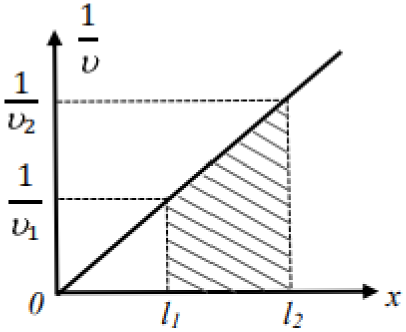


Рисунок 29б. Зависимость результирующей силы от объема погруженного тела, в случае, когда плотность тела больше плотности жидкости

Муравей бежит от муравейника по прямой так, что его скорость обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке А на расстоянии l1=1 м от центра муравейника, его скорость равна V1=2см/с. За какое время муравей добежит от точки А до точки В, которая находится на расстоянии l2=2 м от центра муравейника



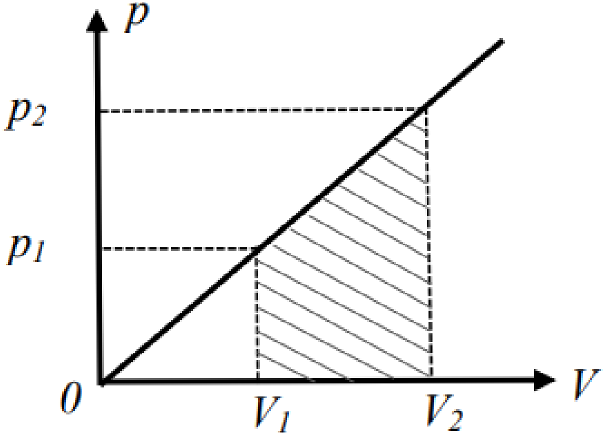
Аналитическое решение данной задачи требует знания интегрального исчисления

$$\frac{1}{\upsilon} = f(x), \quad \left(\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\alpha} x\right)$$

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2}\right) \cdot (l_2 - l_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{l_1}{\upsilon_1} + \frac{l_2}{\upsilon_2}\right) \cdot (l_2 - l_1) = \frac{1}{2\alpha} \cdot (l_2^2 - l_1^2)$$

$$t = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2\upsilon_1 \cdot l_1} = \frac{2^2 - 1^2}{2 \cdot 0{,}02 \cdot 1} = 75(c)$$

Задача. Один моль идеального газа нагревают от T1 до T2 при этом температура газа изменяется пропорционально квадрату давления. Найти работу газа.



$$T = \alpha \cdot p^2 \qquad pV = \nu RT$$

$$p = \frac{V}{\alpha \nu R}$$

$$A = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \cdot (V_2 - V_1) \qquad \frac{1}{2}\nu R(T_2 - T_1)$$

2. Баллистика и оптимизация

В БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ на оптимизацию движения требуется найти либо минимальную скорость, при которой данная цель может быть достигнута, либо максимальную дальность полета при заданных условиях полета (узкая стена, широкая стена, покатая крыша и т.п.). Покажем, как можно решать такие задачи двумя способа ми: алгебраическим и геометрическим.

Т. Мартемьянова, “Как не быть мазилой”, *Квант*, 2018, № 7, 37–41

1. Алгебраический метод решения баллистических задач

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t,$$

$$y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

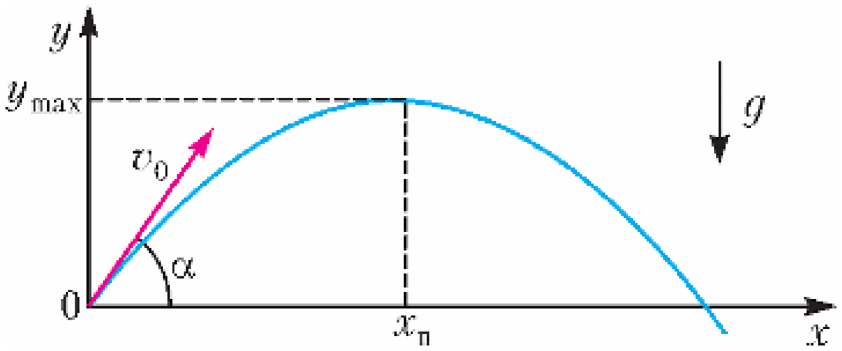


Рис. 1

Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} .$$

Преобразуем уравнение траектории таким образом, чтобы оно содержало только какую-нибудь одну тригонометрическую функцию угла .

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha\right) \frac{gx^2}{2v_0^2} .$$

Таким образом, решение кинематических задач об оптимизации движения при свобод ном падении сводится к исследованию семейства параболических траекторий, зависящих от двух параметров: величины начальной скорости v и угла .

Применение векторов для решения баллистических задач

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \ ,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \ ,$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \ .$$

Приведем некоторые полезные свойства этих треугольников. Но сначала получим несколько вспомогательных результатов.

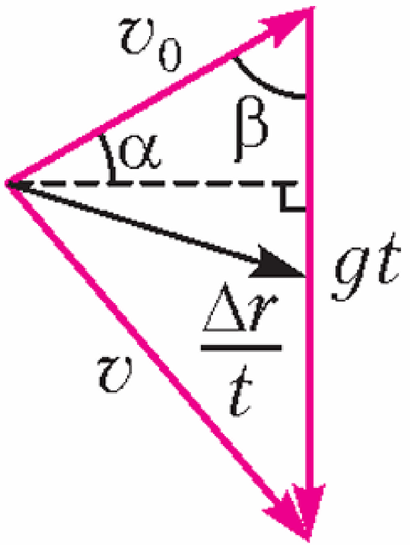
1) Найдем скорость тела на высоте h. Применив закон сохранения энергии

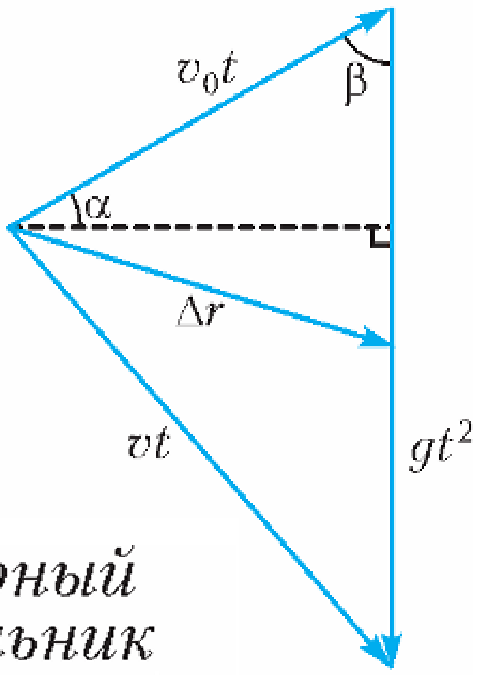
$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh \ ,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \ ,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \ ,$$

Векторный треугольник скоростей

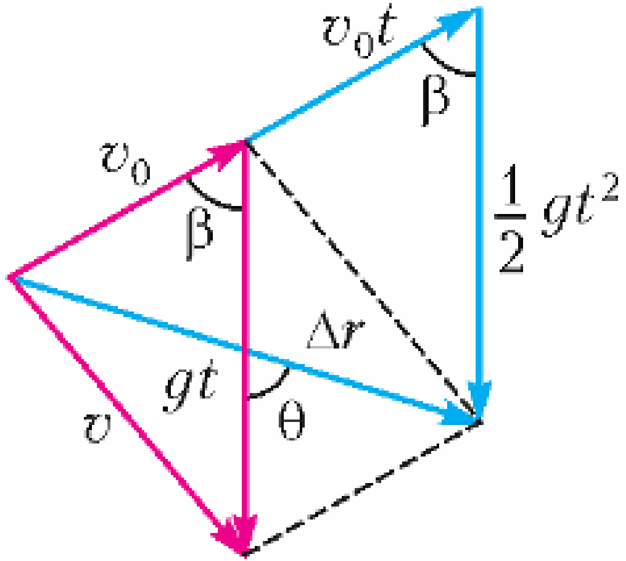




Векторный треугольник перемещений

геометрический способ

Объединение треугольников скоростей и перемещений



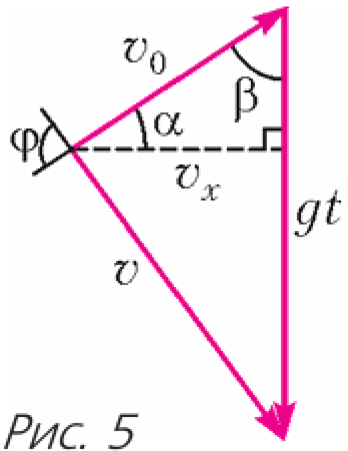


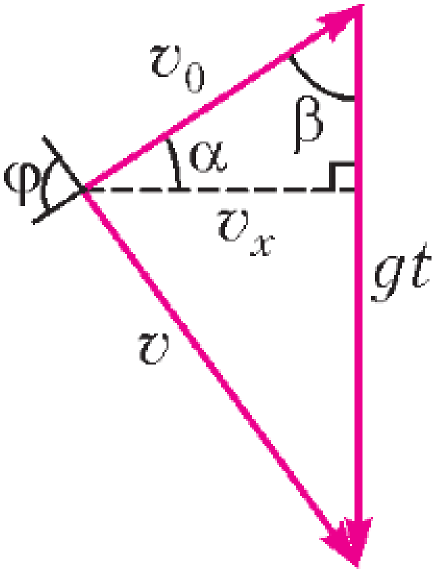
Рис. 5

$$S_\Delta = \frac{1}{2}gt \cdot v_0 \cos\alpha = \frac{1}{2}v \cdot v_0 \sin\varphi \, .$$

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{v v_0 \sin\varphi}{g} \, .$$

геометрический способ

$$S_\Delta = \frac{1}{2} gt \cdot v_0 \cos\alpha = \frac{1}{2} v \cdot v_0 \sin\varphi \,.$$

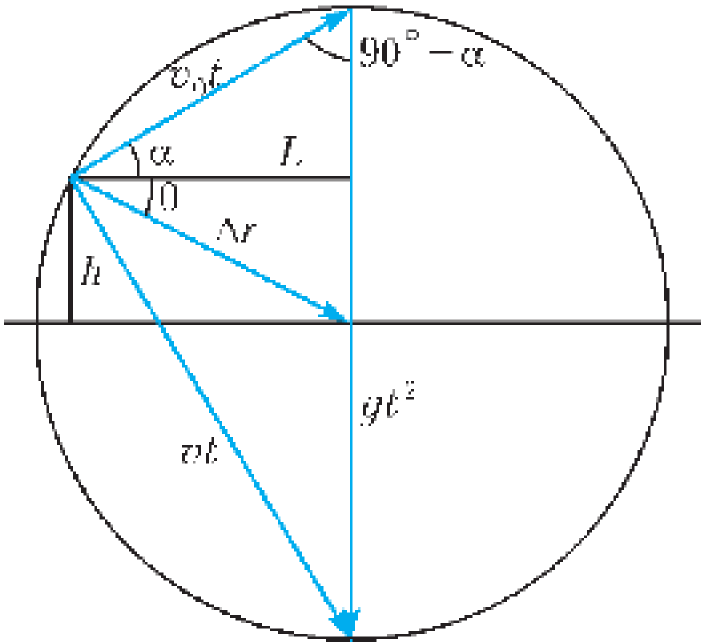


дальность полета по горизонтали

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t = \frac{v v_0 \sin\varphi}{g}$$

$$L_{\max} = \frac{v v_0}{g} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 \mp 2gh}}{g} \,. \qquad t = \frac{\sqrt{2\left(v_0^2 \mp gh\right)}}{g} \,.$$

Покажем, что наибольшая дальность полета достигается, когда век торы начальной и конечной скоростей перпендикулярны.



$$R = \frac{gt^2}{2} = \left|\Delta\vec{r}\right|.$$

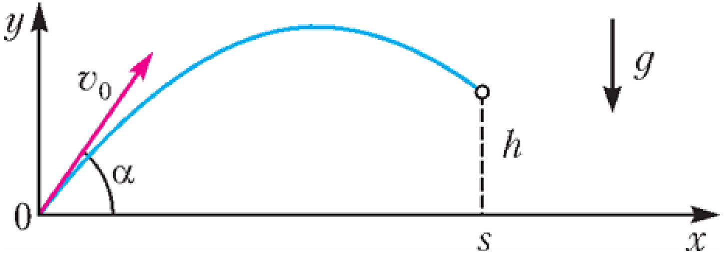
$$\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = $$
$$= \frac{gt^2}{2} = \frac{(gt)^2}{2g} = \frac{v_0^2 + v^2}{2g} = \frac{2v_0^2 \mp 2gh}{2g} = \frac{v_0^2}{g} \mp h.$$

$$L = \sqrt{\left|\overrightarrow{\Delta r}\right|^2 - h^2} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g} - h\right)^2 - h^2} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}.$$

$$L_{\max} = \frac{vv_0}{g} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 \mp 2gh}}{g}.$$

Задача 1. Какова минимальная начальная скорость v_0 , при которой можно попасть в цель, находящуюся на расстоянии s по горизонтали и на высоте h по вертикали?

Потребуем, чтобы траектория, описываемая уравнением y y x , прохо дила через цель, т.е. через точку с координатами x = s, y = h



$$h = s\,\mathrm{tg}\,\alpha - \left(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\right)\frac{gs^2}{2v_0^2}.$$

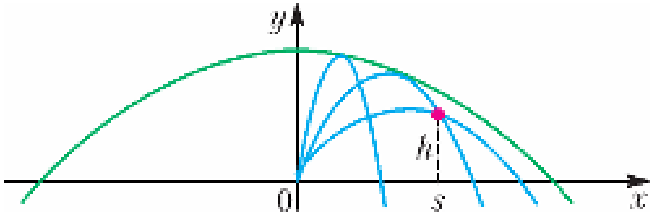
$$\mathrm{tg}^2\,\alpha - \frac{2v_0^2}{gs}\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{2v_0^2 h}{gs^2} + 1 = 0.$$

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2s^2 = 0,$$

$$D = \frac{v_0^4}{g^2s^2} - \frac{2v_0^2 h}{gs^2} - 1,$$

$$v_{0\,\min} = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + s^2}\right)}.$$

Задача 2. Найдите границу области, простреливаемой из данной пушки, т.е. координаты наиболее удаленных целей, в которые еще можно попасть при заданном значении начальной скорости v_0 .



Выразим h из условия равенства нулю дискриминанта D

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2} .$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} .$$

$$x = 0, \ y = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$x = \pm \frac{v_0^2}{g} .$$

Задача №
1

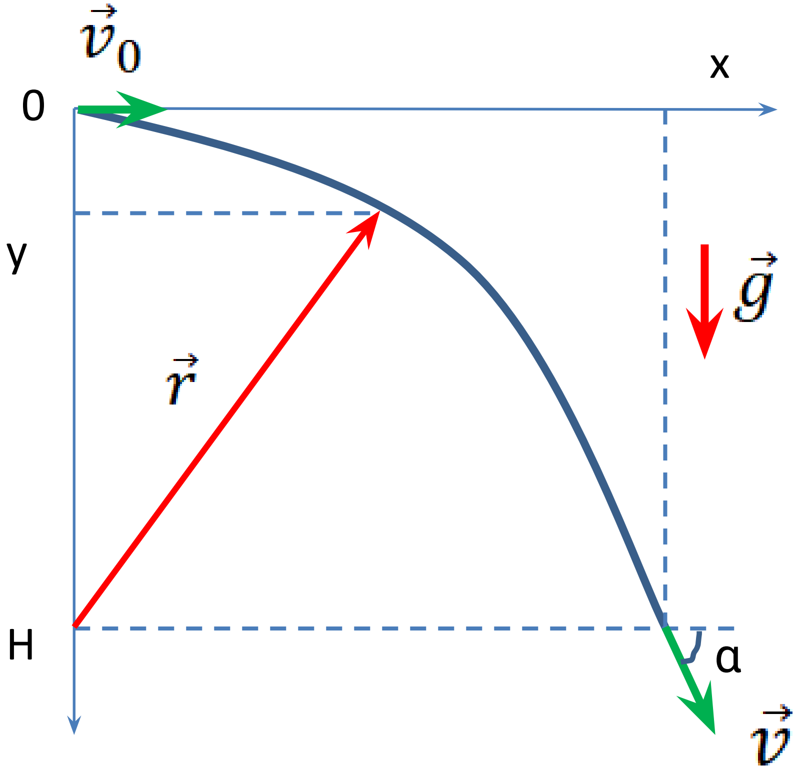
Джульетта бросила для Ромео амулет из окна с высоты H в горизонтальном направлении. Ромео, стоя под окном точно под точкой бросания, заметил, что амулет приближался к нему в течение ровно половины времени (η=1/2) своего полёта. Определите начальную скорость амулета $\mathbf{v_0}$, его дальность полета L и угол $\boldsymbol{\alpha}$, под которым амулет упадёт на землю. Поверхность земли горизонтальна. Размерами Ромео и сопротивлением воздуха пренебречь.

H

$\eta = \frac{1}{2}$

---

v_0, L, α - ?



1 способ (аналитический)

$$x = v_0 t \qquad (1)$$

$$y = H - \frac{gt^2}{2} \qquad (2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2(t)^2 = (v_0 t)^2 + (H - \frac{gt^2}{2})^2 = \frac{g^2}{4} t^4 + v_0^2 t^2 + H^2 - \cancel{2}H\frac{gt^2}{\cancel{2}};$$

$$r^2(t^2) = \frac{g}{4}(t^2)^2 - (gH - v_0^2)t^2 + H^2; \qquad t^2 = \frac{2(gH - v_0^2)}{g^2};$$

$$t_{\text{уд}} = \frac{\sqrt{2(gH - v_0^2)}}{g}$$ - время удаления амулета

$$H = \frac{gT^2}{2}; \qquad T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$ - общее время движения амулета

$$t_{\text{прибл}} = T - t_{\text{уд}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{g} - 2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2};$$

По условию: $t_{\text{прибл}} = \eta T;$ $$\sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{2H}{g} - 2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2} = \eta\sqrt{\frac{2H}{g}};$$

$$(1-\eta)\sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2H}{g} - 2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2}\,;$$

$$(1-\eta)^2\frac{H}{g} = \frac{H}{g} - \left(\frac{v_0}{g}\right)^2;$$

$$\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{H}{g}[1-(1-\eta)^2];$$

$$\frac{v_0^2}{g^2} = \frac{H}{g}\eta(2-\eta);$$

$$v_0 = \sqrt{\eta(2-\eta)gH} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}gH} \longrightarrow \boxed{v_0 = \frac{\sqrt{3gH}}{2}}$$

$$L = v_0T = \frac{\sqrt{\eta(2-\eta)gH}\cdot\sqrt{2H}}{\sqrt{g}} = H\sqrt{2\eta(2-\eta)} \longrightarrow \boxed{L = H\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1{,}22H}$$

$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gT}{v_0} = \frac{g\sqrt{\frac{2H}{g}}}{v_0} = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{\eta(2-\eta)gH}} = \sqrt{\frac{2}{\eta(2-\eta)}} = \sqrt{\frac{2}{3/4}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3};$$

$$\boxed{\alpha = arctg\left(\sqrt{\frac{2}{\eta(2-\eta)}}\right) = arctg\frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 58{,}5^\circ}$$

2 способ (векторный)

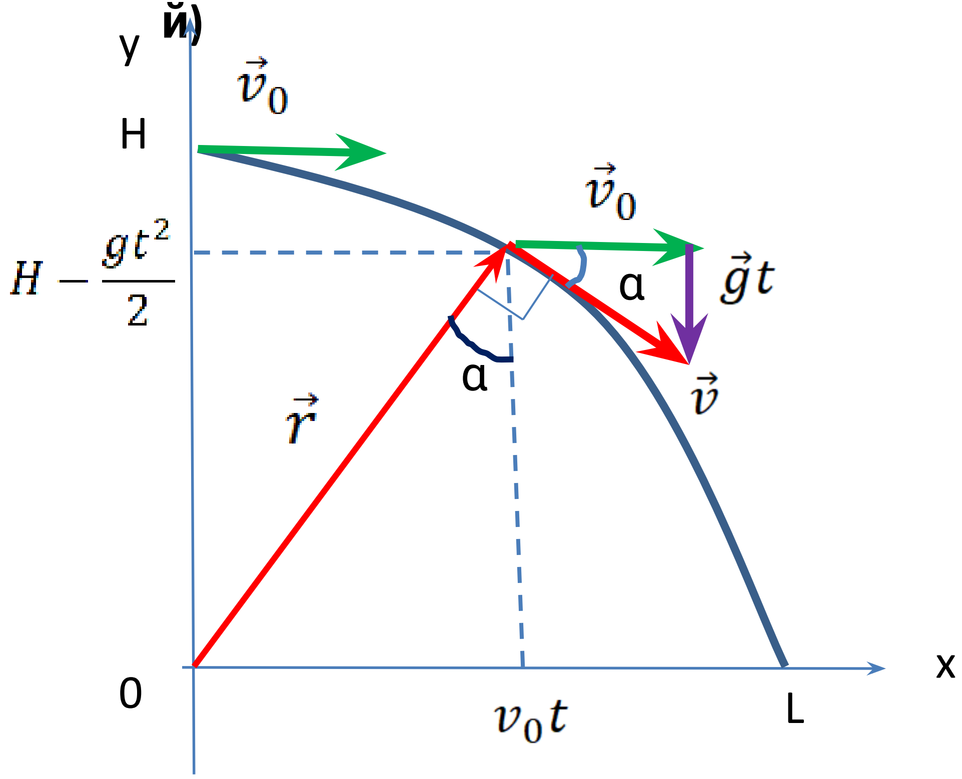
$$\vec{r}\left\{v_0 t; H-\frac{gt^2}{2}\right\}$$

$$\vec{v}\,\{v_0;\ -gt\}$$

$$\vec{r}\cdot\vec{v}=v_0 t\cdot v_0-gt\left(H-\frac{gt^2}{2}\right)=v_0^2 t-gHt+\frac{g^2t^2}{2}\cdot t=t\left[v_0^2-gH+\frac{(gt)^2}{2}\right]$$

$$\text{Если } \vec{v}\perp\vec{r}, \text{то } \vec{r}\cdot\vec{v}=0: \quad t=\begin{cases}0-\text{в момент броска;}\\ \dfrac{\sqrt{2(gH-v_0^2)}}{g}\end{cases}$$

3 способ (геометрический)



$$tg\alpha=\frac{gt}{v_0}=\frac{v_0t}{H-\frac{gt^2}{2}};$$

$$gH-\frac{g^2t^2}{2}=v_0^2;$$

$$t=\frac{\sqrt{2(gH-v_0^2)}}{g}$$

**Задача №
2**

Ромео, стоя под балконом Джульетты и пытаясь привлечь ее внимание, бросает ей в окно маленький камешек. Окно Джульетты расположено на высоте h над Землей, а скорость броска Ромео равна v_0.

а) найдите расстояние между Ромео и окном Джульетты, если камешек летел в течение времени t.

б) докажите неравенств$v_0^2 \geq g(s+h)$

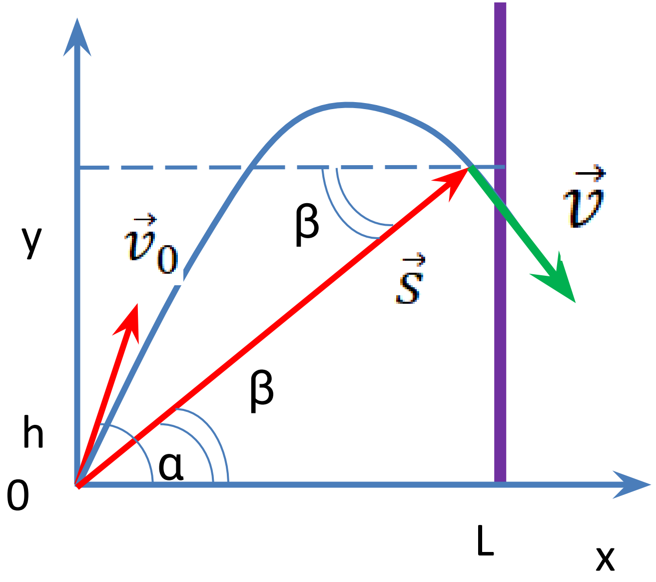
в) при каком максимальном расстоянии до окна Ромео сможет попасть в него камешком?

1 способ (аналитический)

v_0, t, h

S-?

S_{max} - ?



$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t \ ; \qquad v_0 \cos\alpha = \frac{L}{t} \qquad (1)$$

$$h = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \ ; \qquad v_0 \sin\alpha = \frac{h}{t} - \frac{gt}{2} \qquad (2)$$

$$(1)^2 + (2)^2:$$

$$v_0^2 = \left(\frac{L}{t}\right)^2 + \left(\frac{h}{t}\right)^2 + \cancel{2}\frac{h}{\cancel{t}} \cdot \frac{g\cancel{t}}{\cancel{2}} - \left(\frac{gt}{2}\right)^2$$

$$\frac{L^2}{t^2} = v_0^2 - \left(\frac{h}{t}\right)^2 - gh - \left(\frac{gt}{2}\right)^2$$

$$L^2 = (v_0 t)^2 - h^2 - ght^2 - \left(\frac{gt^2}{2}\right)^2$$

$$L^2 = (v_0 t)^2 - h^2 - gt^2\left(h + \frac{gt^2}{4}\right) \qquad (3)$$

$$S = \sqrt{h^2 + L^2} \overset{3}{\Rightarrow} \boxed{S = t \cdot \sqrt{v_0^2 - g\left(h + \frac{gt^2}{4}\right)}}$$

$$S^2(t^2) = v_0^2 \cdot t^2 - ght^2 - \frac{g^2}{4}(t^2)^2$$

$$S^2(t^2) = -\frac{g^2}{4}(t^2)^2 + (v_0^2 - gh)t^2$$

- парабола, ветви вниз

$$S_{max}^2 = c - \frac{b^2}{4a} = 0 + \frac{(v_0^2 - gh)^2}{g^2} = \left(\frac{v_0^2 - gh}{g}\right)^2$$

$$\boxed{S_{max} = \frac{v_0^2}{g} - h} \qquad (4)$$

Замечание:

$$\sin\beta = \frac{h}{S_{max}} \xrightarrow{(4)} \boxed{\beta = \arcsin\left(\frac{gh}{v_0^2 - gh}\right)} \quad (5)$$

$$L = S_{max}^2 - h^2 \xrightarrow{(4)} \boxed{L = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}} \quad (6)$$

$$\tau^2 = \boxed{-\frac{b}{2a}} = -\frac{(v_0^2 - gh)^2}{-g^2}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\sqrt{2(v_0^2 - gh)}}{g}} \quad (7)$$

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot \tau \qquad \cos\alpha = \frac{L}{v_0 \tau}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gh}{2(v_0^2 - gh)}} \qquad (8)$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$$

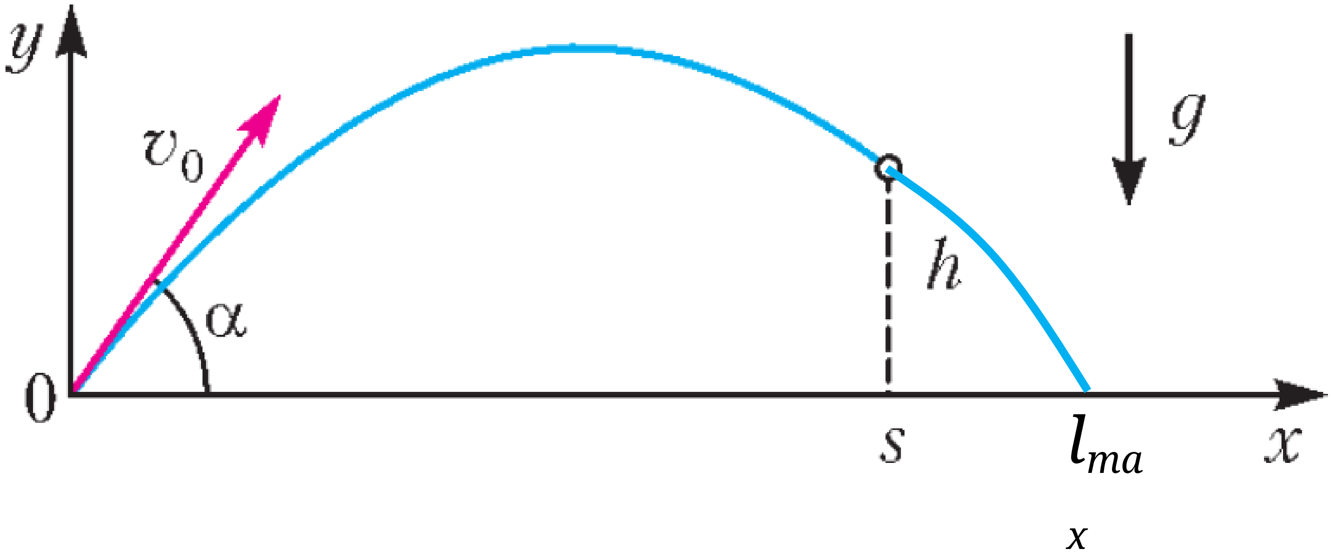
$$\xrightarrow{(8)} \qquad \boxed{\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}\right)}$$

$$\xrightarrow{(4)} \qquad v_0^2 \geq g(S+h), \text{ ч. т. д.}$$

Задача № 3

При осаде войском Капулетти замка Монтекки осажденные вели стрельбу по наступающему противнику с помощью катапульт из-за крепостной стены высотой h=20,4 м. Начальная скорость снарядов v_0=25 м/с . На каком максимальном расстоянии l_{max} от стены находились цели, которых могли достичь снаряды катапульты? Сравните это расстояние с максимальной дальностью L_{max} катапульты. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1 способ (аналитический)



$$x = v_0 t cos\alpha; \qquad y = v_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 cos^2\alpha};$$

$$\frac{1}{cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha;$$

$$y = xtg\alpha - (1 + tg^2\alpha)\frac{gx^2}{2v_0^2};$$

$$tg^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gS}tg\alpha + \frac{2v_0^2 h}{gS^2} + 1 = 0$$

D=0;

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2S^2 = 0$$

$$\boxed{h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gS^2}{2v_0^2}} \quad \Big| \cdot \frac{2g}{v_0^2}$$

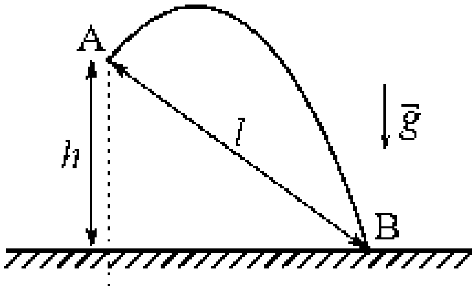
$$S^2 = \frac{v_0^4}{g^2}\left(1 - \frac{2gh}{v_0^2}\right);$$

$$\boxed{S = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}} \approx 38.3 \text{ м}}$$

Решите каждую из следующих задач двумя способами: алгебраическим и геометрическим.

№1 Интернет-этап олимпиады Phystech.International 2018 (11 кл)

Мяч брошен под углом к горизонту из точки А, которая находится на высоте $h = 4$ м. Расстояние от точки А бросания до точки В падения мяча на землю $l = 13{,}8$ м. Найдите минимальную начальную скорость v_0 мяча в таком полете. Под каким углом β к горизонту нужно совершить бросок? Считайте $g = 9{,}8$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.



№2. Заключительный этап олимпиады РИТМ МИЭТ 2019 (11 кл)

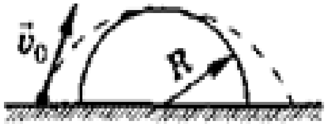
Мальчик, бросая камень со скоростью $v_0 = 20$ м/с с крыши дома, определил максимальную горизонтальную дальность полёта. Спустившись на землю и повторив броски камня с той же начальной скоростью v_0, он заметил, что максимальная горизонтальная дальность полета камня уменьшилась в $n = 3/2$ раза. На какой высоте h находится крыша дома?

№3. МАИ; ЗФТШ 11 КЛ 2020

Снаряд вылетает из ствола пушки, стоящей у подножия горы, составляющей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом, со скоростью $v_o = 73{,}5$ м/с. Под каким углом β к поверхности горы нужно произвести выстрел, чтобы дальность полёта снаряда, измеренная вдоль склона, была максимальной? Чему равна максимальная дальность полёта L_{max}? Вычислите для этого случая наибольшее удаление H снаряда от поверхности склона. Считайте $g = 9{,}8$ м/с^2.

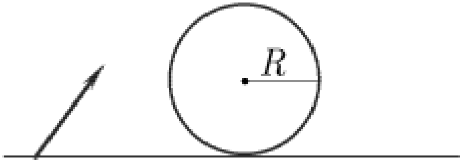
№4. Турчина 1.267

Полусферическая горка имеет радиус $R = 4{,}45$ м. Найдите наименьшую скорость v_{0min}, которую надо сообщить с поверхности земли небольшому мячу, чтобы он перелетел горку, не коснувшись её. С какого расстояния S от основания горки и под каким углом α к горизонту надо совершить бросок? Считайте $g = 9{,}8$ м/с^2.



№5. По материалам сайта «Простая физика»

Шар имеет диаметр $D = 2{,}56$ м. Найдите наименьшую скорость v_{0min}, которую надо сообщить с поверхности земли небольшому мячу, чтобы он перелетел шар, не коснувшись его. С какого расстояния S от точки касания шара с поверхностью земли и под каким углом α к горизонту надо совершить бросок? Считайте $g = 9{,}8$ м/с^2.

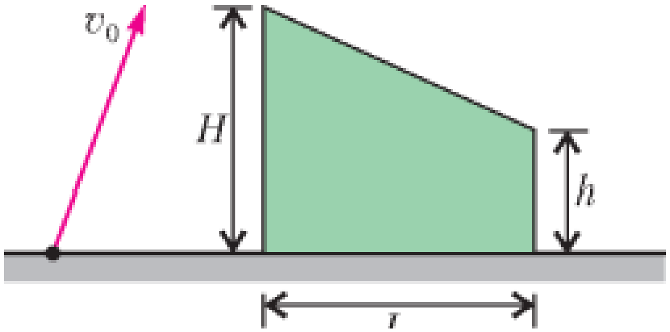


№6. Журнал квант 2018 №7

Какова наименьшая скорость броска v_0 , с которой можно перекинуть тело через прямоугольную преграду длиной L и высотой h?

№7. Журнал квант 2018 №7

При какой минимальной начальной скорости v_0 можно перебросить камень через дом с покатой крышей, если ближайшая к месту броска стена имеет высоту H, задняя стена имеет высоту h, а ширина дома равна L ?



3. Математический анализ в физике

При решении задач по физике мы также сталкиваемся с исследованием функции.
Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции из математического анализа являются прикладными. Чаще всего мы их встречаем с геометрическим или экономическим содержанием, но есть также задачи с физическим смыслом, которые легко решаются средствами высшей математики.
Задачи, которые будут представлены, можно решить и без применения понятия производной и определённого интеграла. Но в старших классах можно представить данные решения, как альтернативные и более удобные.

Установлено, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле $W = \dfrac{E^2 R}{(r+R)^2}$, где E – электродвижущая сила элемента, r – внутреннее сопротивление, R – внешнее сопротивление. Каким должно быть сопротивление цепи, чтобы отдаваемая элементом энергия W была наибольшей?

на экстремум: $W'(R) = \dfrac{E^2 r - E^2 R}{(r+R)^3}$. Следовательно, $W'(R) = 0$ при $R = r$. Определим знак второй производной в этой точке: $W''(R) = E^2\left(\dfrac{2R-4r}{(r+R)^4}\right)$, $W''(R)\big|_{R=r} = E^2\left(\dfrac{2r-4r}{(2r)^4}\right) < 0$. Следовательно, при $R = r$ отдаваемая элементом энергия будет наибольшей.

Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединённых сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление всей цепи максимально, если при последовательном соединении этих сопротивлений оно равно R?

Решение

Пусть r – сопротивление электрической цепи, состоящей из двух параллельно соединённых сопротивлений x и y. Тогда $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{r}$. С другой стороны, из условия задачи имеем: $x+y=R$. Выразим одну из переменных: $y=R-x$. Получили функцию: $r(x)=\frac{x(R-x)}{R}$, где $0<x<R$. Исследуем эту функцию на экстремум: $r'(x)=\frac{R-2x}{R}=0$. Следовательно, $x=\frac{R}{2}$. Определим знак второй производной в этой точке: $r''(x)\big|_{x=-\frac{R}{2}}=-\frac{2}{R}<0$, $\frac{R}{2}\in(0,R)$. Таким образом, $r(x)$ принимает максимальное значение при $x=\frac{R}{2}$.

Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности

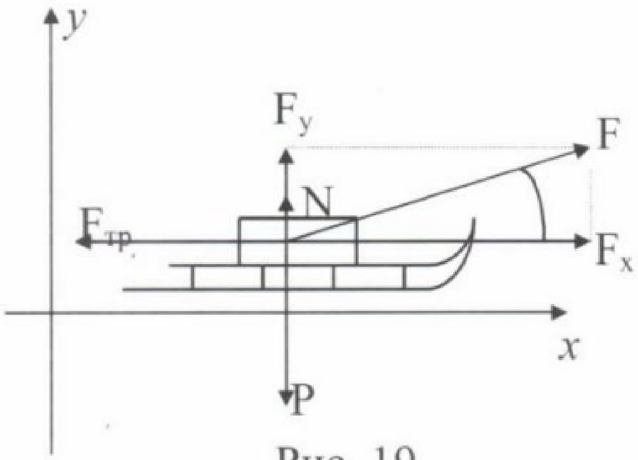


Рис. 19

под действием силы F, приложенной к центру тяжести. Какой угол α должна составлять линия действия силы F с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы? Коэффициент трения саней о снег равен k.

Решение

Разложим силу F на горизонтальную и вертикальную составляющие F_x и F_y (см. рис. 19). Сила нормального давления саней и вертикальной составляющей силы F: $N = P - F\sin\alpha$, поэтому сила трения $F_{mp} = kN = k(P - F\sin\alpha)$. Сани будут двигаться равномерно при условии компенсации горизонтальных сил: $F_x = F_{mp}$, то есть $F\cos\alpha = k(P - F\sin\alpha)$. Отсюда находим силу F как функцию угла α:

$F(\alpha) = \dfrac{kP}{k\sin\alpha + \cos\alpha}$. $\quad F'(\alpha) = \dfrac{kP(\sin\alpha - k\cos\alpha)}{(k\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$. Следовательно, $F'(\alpha) = 0$ при $k = tg\alpha$.

Неравенства в физических за

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}\,.$$

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \qquad (a_1, \ldots, a_n \geqslant 0).$$

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2.$$

Найти наименьшее значение функции $y = x + \dfrac{32}{x^2}$ при $x > 0$.

$$y = x + \frac{32}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{32}{x^2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{32}{x^2}} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

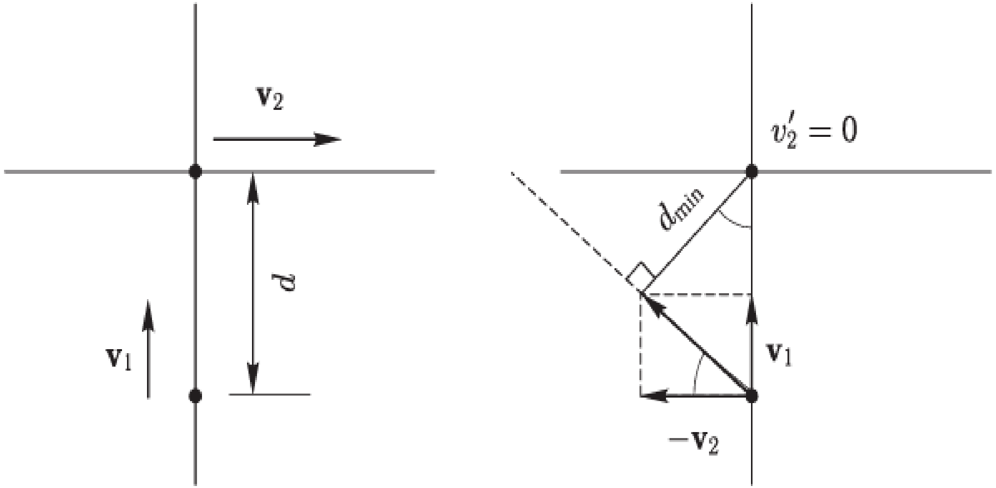
1. Тонкая линза имеет фокусное расстояние равное F и даёт действительное изображение. Каково минимальное расстояние между предметом и его изображением?
2.Электронагревательный прибор потребляет мощность от источника тока, ЕДС которого равна ε, а внутреннее сопротивление проводника в сумме равна r. Какое сопротивление R должен иметь прибор, чтобы в нём выделялась максимальная мощность?
3.Трансформатор переменного тока нужно сконструировать так, чтобы его крестообразный железный сердечник заполнял возможно большую часть внутренней полости круглой обмотки. Каковы должны быть размеры сечения сердечника, если радиус катушки равен R.
4.Определите, при каком минимальном коэффициенте μ трения однородного тонкого стрежня о пол человек может медленно без проскальзывания поднять его с пола до вертикального положения, прилагая к концу стержня силу, перпендикулярную ему.
5.(***) Каков максимальный угол упругого θ рассеяния α –частицы на дейтроне? Дейтрон – ядро изотопа водорода дейтерия, состоит из протона и нейтрона, α –частица – ядро гелия, состоит из двух протонов и двух нейтронов. Считайте, что масса дейтрона в два раза меньше массы α –частицы.
6.(***) В широкий сосуд с жидкостью частично погружается плоский конденсатор. Конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора постоянную разность потенциалов U. Расстояние между пластинами d, плотность жидкости ρ, её диэлектрическая проницаемость ε. На какую высоту h поднимается жидкость в конденсаторе?

Раздел 2. Использование методологических принципов

1. Принцип относительности
2. Принцип симметрии
3. Принципы простоты

Принцип относительности

Задача 1. Две дороги пересекаются под прямым углом. Автомобиль, движущийся по одной из дорог со скоростью v1, находится на расстоянии d от перекрестка в тот момент времени, когда другой автомобиль, движущийся со скоростью v2 по второй дороге, пересекает перекресток. Каким будет наименьшее расстояние dmin между автомобилями?



$$\frac{d_{\min}}{d} = \frac{v_2}{v_1'},$$

$$\frac{d_{\min}}{d} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

$$d_{\min} = d\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

В данной задаче новая система отсчета, связанная с автомобилем, является инерциальной, однако в кинематических задачах это не имеет принципиального значения. Иначе обстоит дело в динамических задачах, когда инерциальность новой системы отсчета играет принципиальную роль, обеспечивая одинаковость физических законов в рассматриваемых системах.

Задача 2. Возможно ли излучение света свободным электроном?

На первый взгляд может показаться, что движущийся электрон может уменьшить свою скорость, передав испускаемому фотону часть своего импульса и кинетической энергии

Энергия образовавшейся системы «электрон +фотон», равная первоначальной энергии электрона, теперь будет складываться из энергии движущегося со скоростью v электрона и энергии hv фотона. В результате должно выполняться равенство

$$m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + h\nu, \qquad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m_0c^2 + h\nu, \qquad \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{h\nu}{c}.$$

Итак, решение этой задачи приводит к важному выводу, что излучать или поглощать фотоны электрон может только тогда, когда он движется с ускорением.

Задача 1.21. Водометный катер движется по озеру с постоянной скоростью v, выбрасывая n литров воды в секунду со скоростью u относительно катера. Определите мощность мотора катера.

$$F = n\rho\left(u - v\right).$$

Умножая F на скорость движения катера v, получаем мощность N1, развиваемую при совершении работы реактивной силой:

$$N_1 = Fv = n\rho\left(u - v\right)v. \qquad N_2 = \frac{n\rho}{2}\left(u - v\right)^2.$$

Полная мощность N, развиваемая мотором катера, равна сумме N1+N2. После элементарных преобразований находим

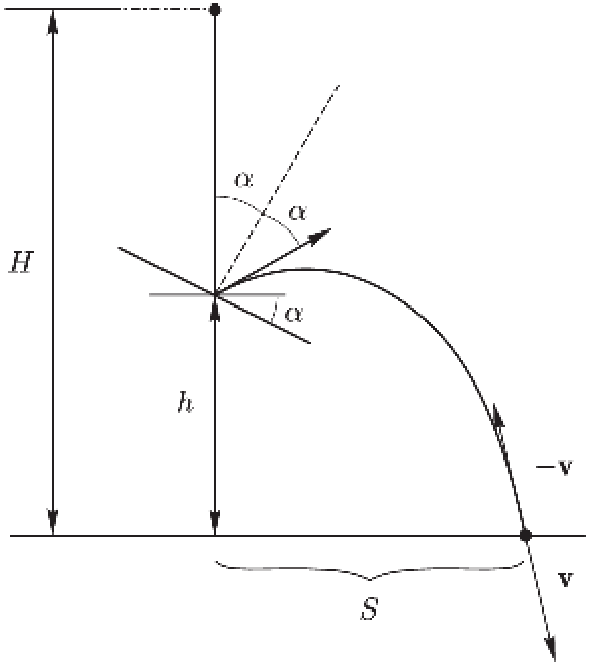
$$N = \frac{n\rho}{2}\left(u^2 - v^2\right).$$

Принцип симметрии

Важно четко демонстрировать инвариантность определенных характеристик физической системы относительно преобразований, допускаемых соображениями симметрии

Задача 1.22. Стальной шарик свободно падает без начальной скорости с высоты H на мраморную плиту. На какой высоте h и как следует ее расположить, чтобы упруго отразившись, шарик улетел на максимальное расстояние по горизонтали?

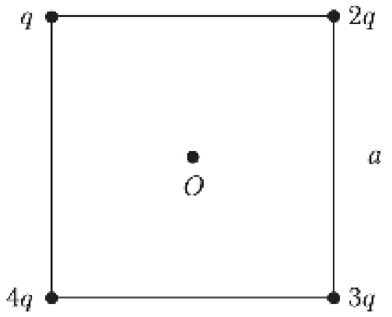
Уравнения динамики консервативных систем не изменяются при обращении времени, то есть при замене $t \to -t$. Это означает, что движение в потенциальном силовом поле обратимо при обращении скорости движения в какой либо точке траектории, то есть замене $v \to -v$, тело будет двигаться «вспять» по той же самой траектории, проходя все участки за те же самые промежутки времени, что и при движении в «прямом» направлении. При этом в любых точках траектории при движении и в прямом, и в обратном направлениях модули скорости будут одинаковыми.

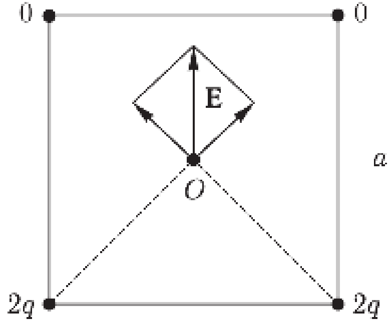


При упругом ударе о плиту тело упадет на землю со скоростью

$$v = \sqrt{2gH}$$

Задача . Определить напряженность и потенциал электри ческого поля в центре квадрата со стороной a, если в его вершинах расположены точечные заряды, показанные на рис.





Задачу можно решать непосредственно, используя только принцип суперпозиции. Для потенциала это сразу приводит к р

$$\varphi = \frac{10\sqrt{2}\,q}{a}.$$

А вычисление напряженности, определяемой векторной суммой на пряженностей, создаваемых отдельными зарядами, потребует преобра зований, которые можно сделать короче, если воспользоваться прин ципом симметрии.

Убирая из исходной схемы заряды,

$$E = 4\sqrt{2}\,q/a^2$$

В линейном ускорителе ионов, обладающих заря дом q и массой m, ускоряющее напряжение равно U, а путь, про ходимый ионами в процессе разгона, равен L. Как изменится время пролета иона на участке разгона в другом ускорителе, геомет рически подобном первому, но рассчитанному на ускорение ионов с зарядом q' и массой m', в котором используется напряжение U', а длина участка р

$$m' = \alpha \cdot m, \quad q' = \beta q, \quad U' = \varepsilon U, \quad L' = \gamma L, \quad t' = \eta t,$$

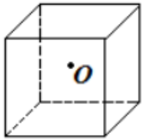
$$E = \frac{mv^2}{2} + q\varphi,$$

$$E' = \frac{m'v'^2}{2} + q'\varphi' = \frac{\alpha\gamma^2}{\eta^2} \cdot \frac{mv^2}{2} + \beta\varepsilon\varphi. \qquad \frac{\alpha\gamma^2}{\eta^2} \equiv \beta\varepsilon \equiv c,$$

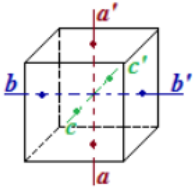
$$E' = cE, \qquad \eta = t'/t = \gamma\sqrt{\alpha/\beta\varepsilon}\,.$$

Данная задача, решение которой проведено без сложных математических выкладок, только с помощью качественного метода — метода подобия, может послужить основой для более сложного учебного исследования, требующего применения и качественных методов, и более сложного математического аппарата, и использования компьютерных средств.

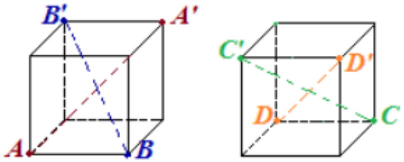
Методы расчета цепей постоянного



Точка O – центр симметрии



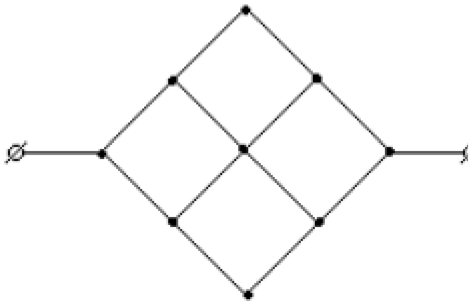
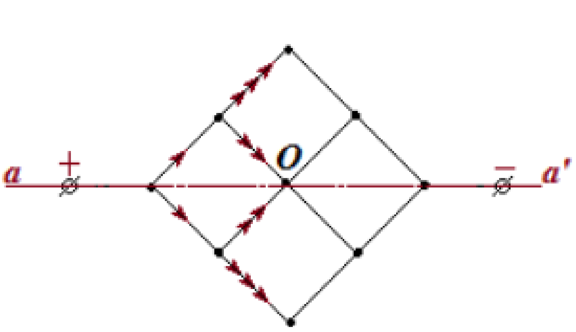
Три оси симметрии – *aa'*, *bb'*, *cc'*

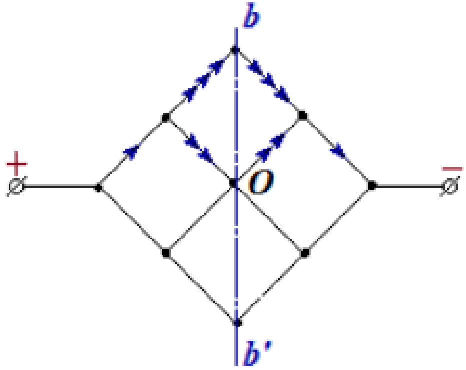


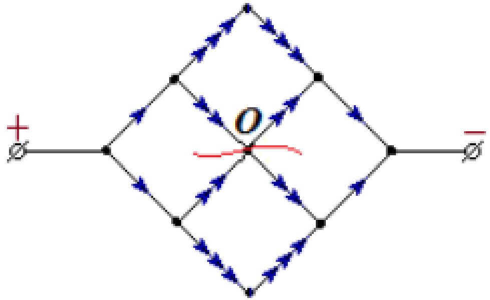
Четыре вращательных оси симметрии – *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'*.

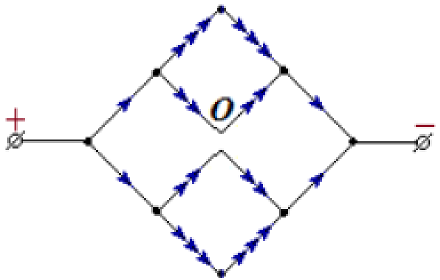
Очевидно, в симметричных участках цепи текут одинаковые токи! Девять (!) плоскостей симметрии: Как правило, задача сводится к определению общего сопротивления цепи. Какие приемы можно расчета цепи можно использовать, если цепь не является элементарной комбинацией последовательного и параллельного соединений?

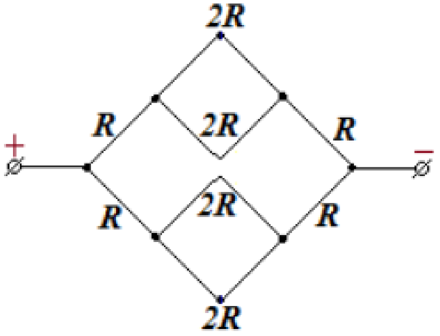
Перунова М.Н. Расчет электрических цепей : практикум / М.Н. Перунова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2014. – 121 с.

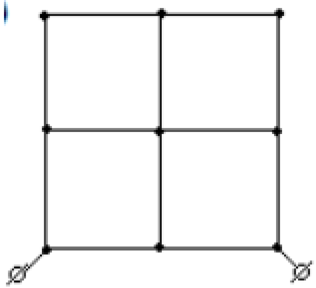


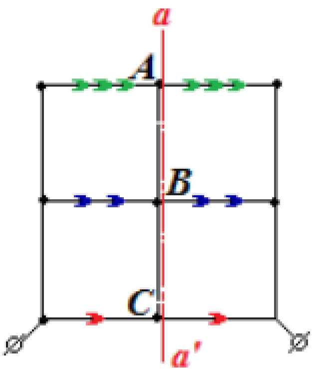


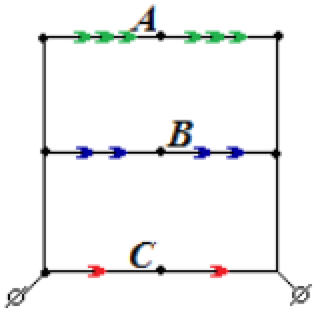


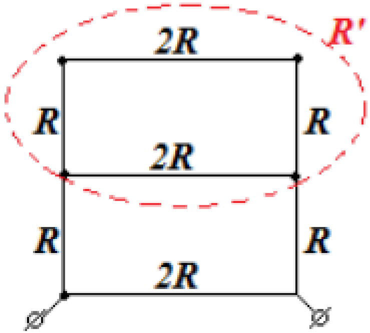


$$R_{об} = \frac{R_{верхн.}}{2} = \frac{3R}{2} = 1,5R.$$



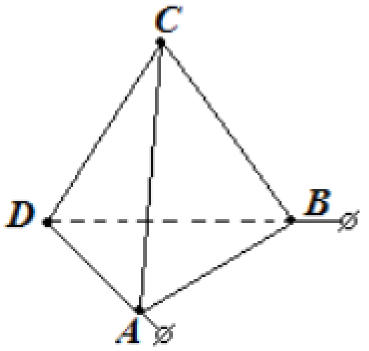






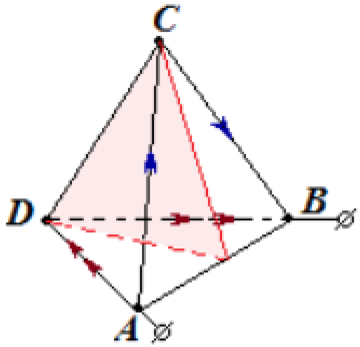
$$R' = \frac{(R + 2R + R)\cdot 2R}{(R + 2R + R) + 2R} = \frac{8R}{6} = \frac{4R}{3}.$$

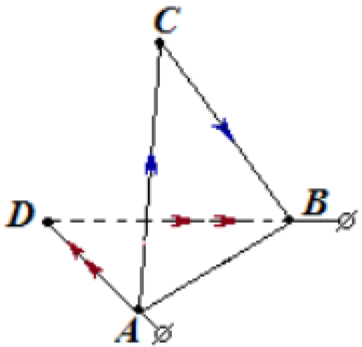
$$R_{об} = \frac{\left(R + \frac{4R}{3} + R\right)\cdot 2R}{\left(R + \frac{4R}{3} + R\right) + 2R} = \frac{20R}{12} = \frac{5R}{3}.$$

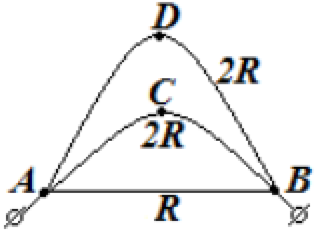


$$\frac{1}{R_{об}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{4}{2R}$$

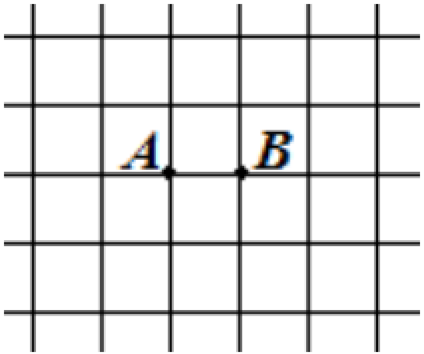
$$R_{об} = \frac{R}{2}.$$

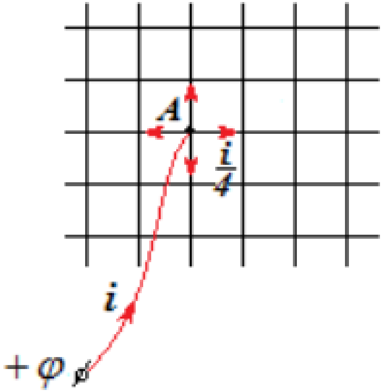


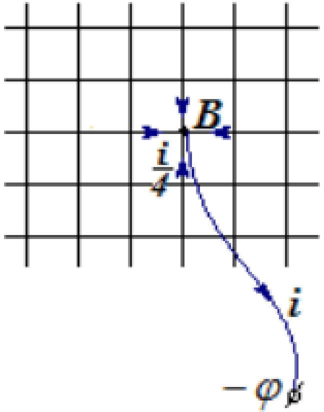


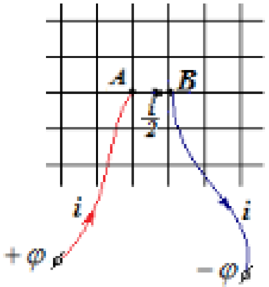


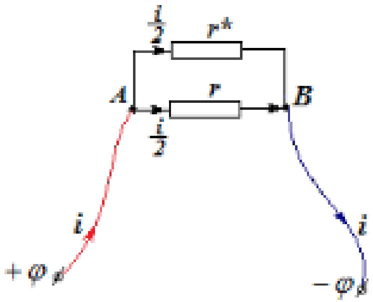
Бесконечные сетки и арматуры









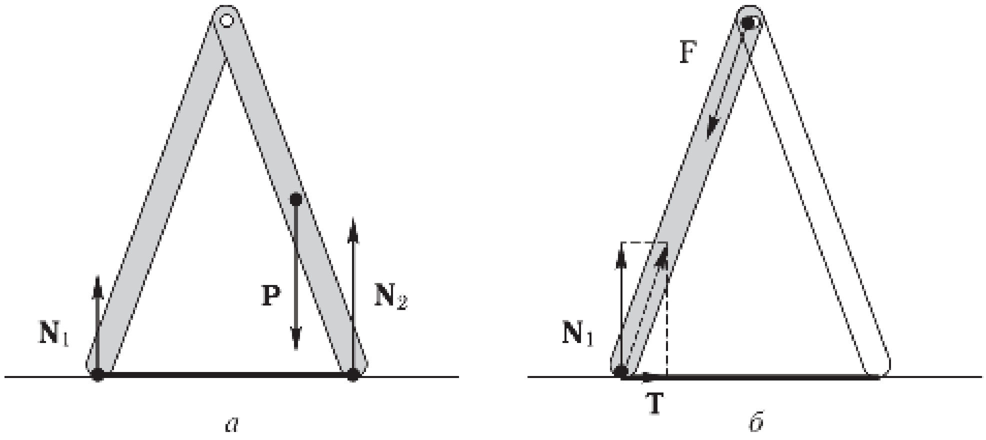


$$R = \frac{r \cdot r^*}{r + r^*} = \frac{r}{2}.$$

Принципы простоты

Принцип простоты всегда интуитивно используется при решении задач. Однако для развития умения решать задачи важно научиться целенаправленно и осознанно руководствоваться этим принципом для поиска наиболее эффективных путей решения задачи.

Задача. Легкая лестница стремянка состоит из двух одинаковых частей, шарнирно соединенных сверху и связанных веревкой у основания. Найдите натяжение веревки и силы, действующие в шарнире и на горизонтальный пол, на котором стоит стремянка, если на середине одной из половин стремянки стоит человек ве сом Р. Трение отсутствует.



$$N_1 + N_2 = P, \quad 2N_1 = \frac{P}{2}. \qquad N_1 = \frac{P}{4}, \quad N_2 = \frac{3P}{4}.$$

$$T = N_1 \operatorname{ctg} \alpha = \frac{P}{4} \operatorname{ctg} \alpha, \quad F = \frac{N_1}{\sin \alpha} = \frac{P}{4 \sin \alpha}.$$

При решении нетривиальных задач, вообще говоря, должны присутствовать в той или иной степени все три момента — общие методологические принципы физики, фундаментальные законы и частные законы, описывающие конкретные явления.

Спасибо за внимание!