Задачи с параметрами

(Доц. кафедры ПМ ОГУ, к.ф.-м.н, доц. Павленко А.Н.)

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Параметром называется независимая фиксированная переменная, значение которой может принадлежать множеству действительных чисел или заданному подмножеству множества действительных чисел.

Решить задачу с параметром означает дать на нее ответ при всех допустимых в задаче значениях параметра или дать множество значений параметра при которых задача имеет заданный ответ.

Решение задач с параметром во многом аналогично решению задач по физике в общем виде.

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

1. Уравнения, неравенства и их системы, которые надо решить для любого значения параметра или для всех значений параметра из данного множества.

2. Уравнения, неравенства и их системы для которых требуется определить количество решений в зависимости от параметра или множество значений параметра при которых задача имеет заданное число решений.

3. Уравнения, неравенства и их системы для которых требуется найти множество значений параметра при которых решение задачи обладает некоторым заданным свойством:

1) содержит заданный промежуток;

2) множество решений является подмножеством множества решений другой задачи и т.д.

4. Найти значения параметра, при которых данная функция имеет заданные свойства.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

1. Аналитический.
2. Графический.
3. Решение задачи относительно параметра

Графический метод

Задача с переменнными x, y и параметром a решается с помощью построения линий или областей в координатах Oxy.

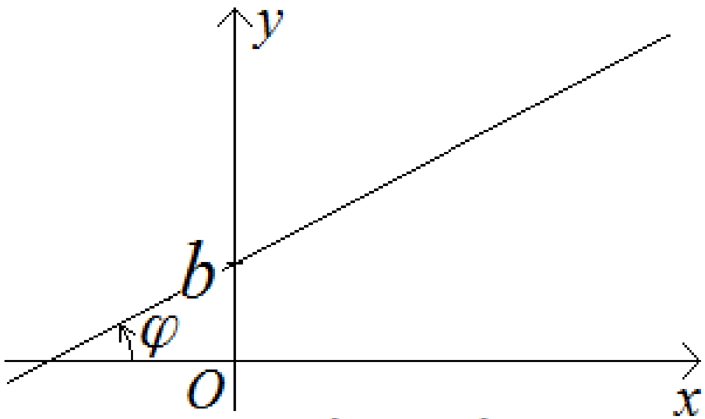
Задача с переменной x и параметром a решается с помощью построения линий или областей в координатах Oxa.

Данный метод нагляден и часто более удобен по сравнению с другими методами.

Он применяется, если в задании (возможно после преобразований) можно выделить уравнения (неравенства), которые задают прямую, окружность и т.д. (или области с ними связанные).

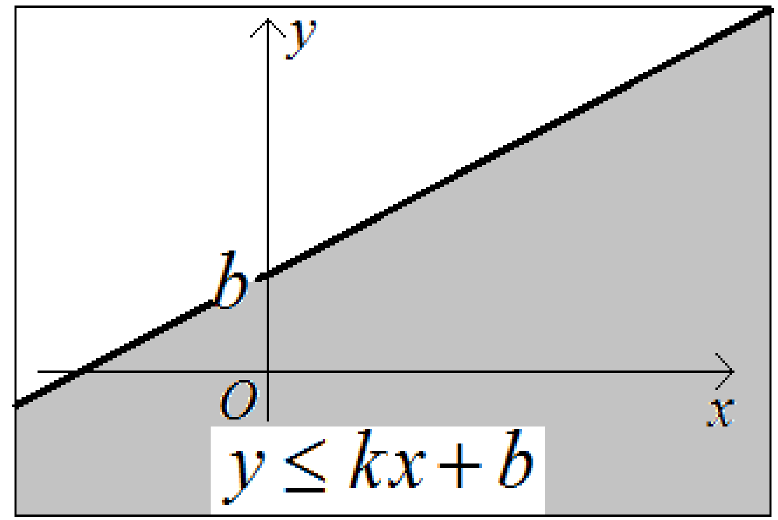
Материалы к графическому методу

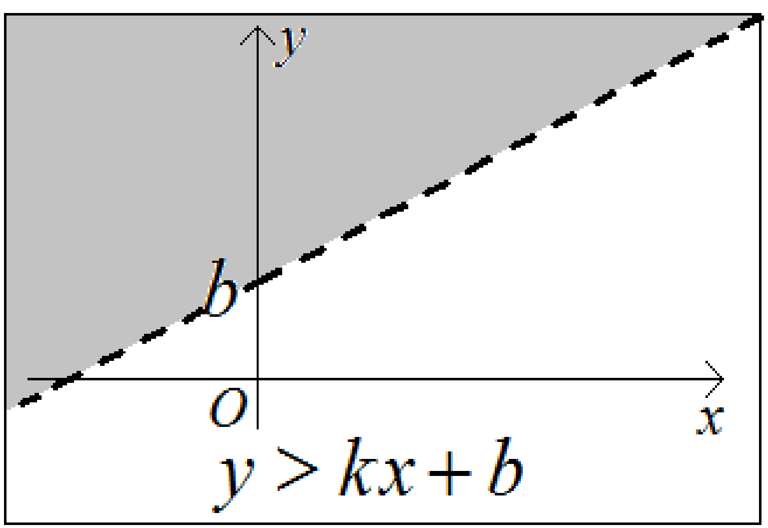
Уравнение прямой и неравенства, которые связаны с ним

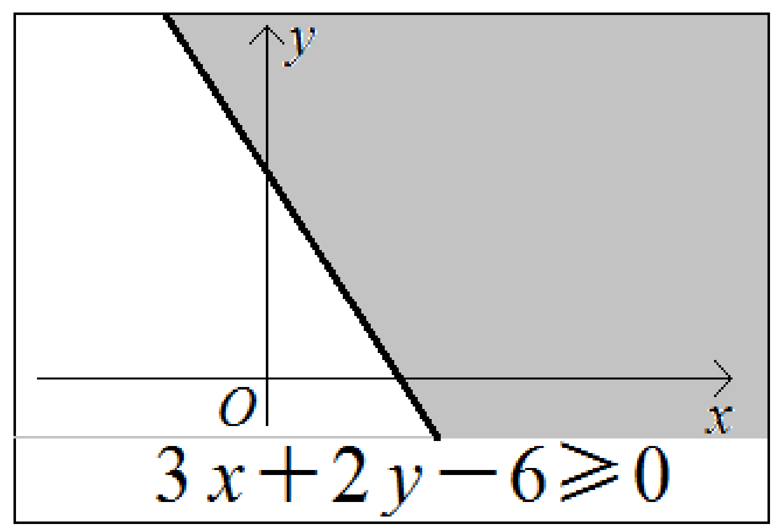


$$y = kx + b$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} k$$

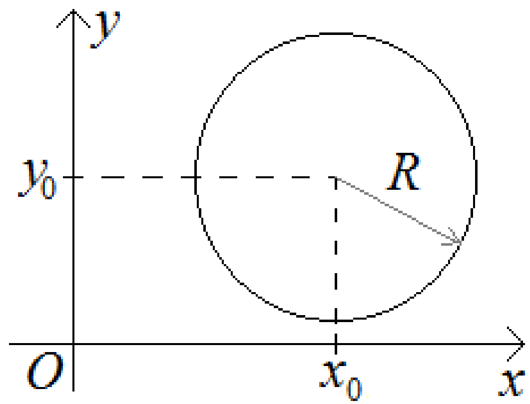




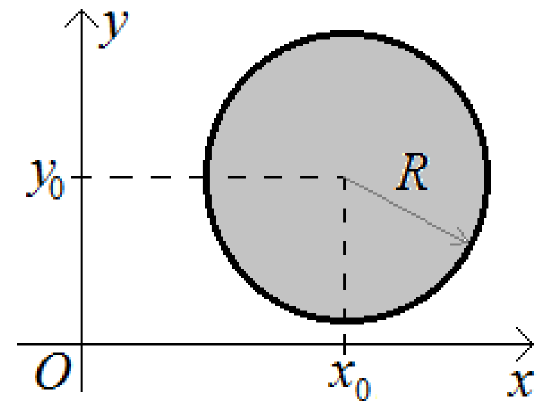


Определение области по точке.

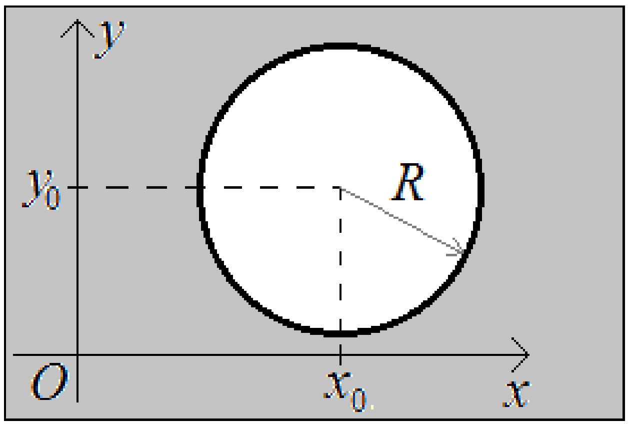
Уравнение окружности и неравенства, которые связаны с ним



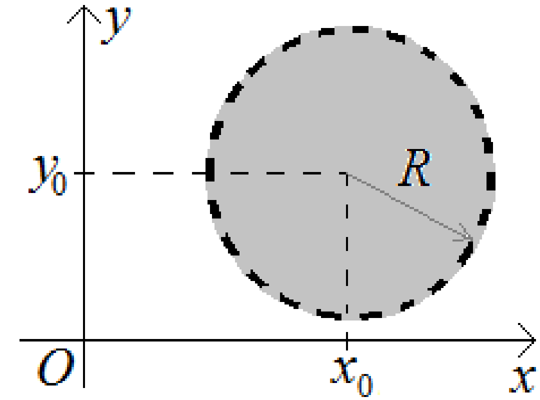
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2$$

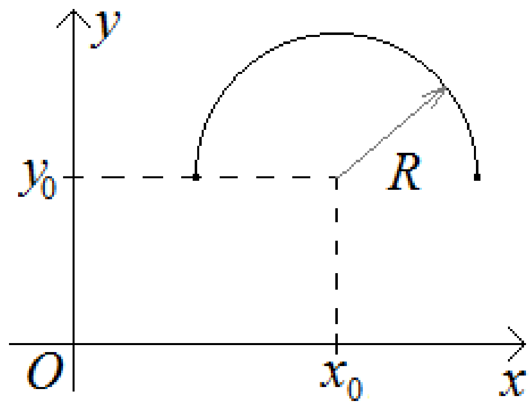


$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\ge R^2$$

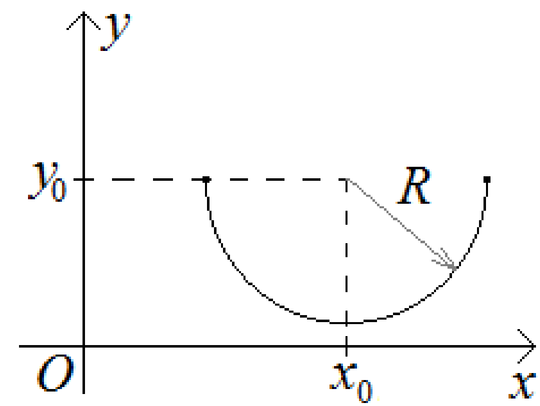


$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2< R^2$$

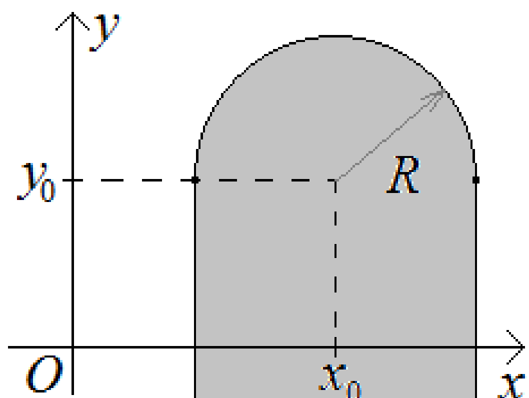
Уравнение полуокружности и неравенства, которые связаны с ним



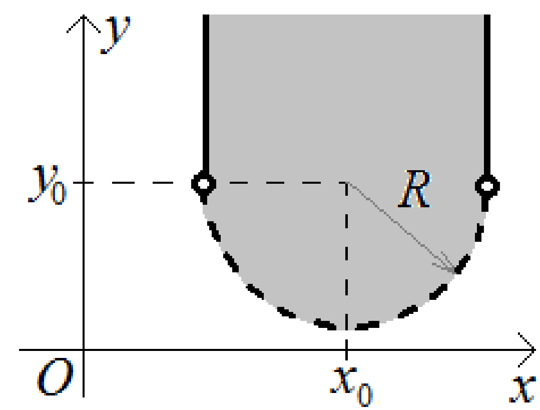
$$y - y_0 = \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$



$$y - y_0 = -\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

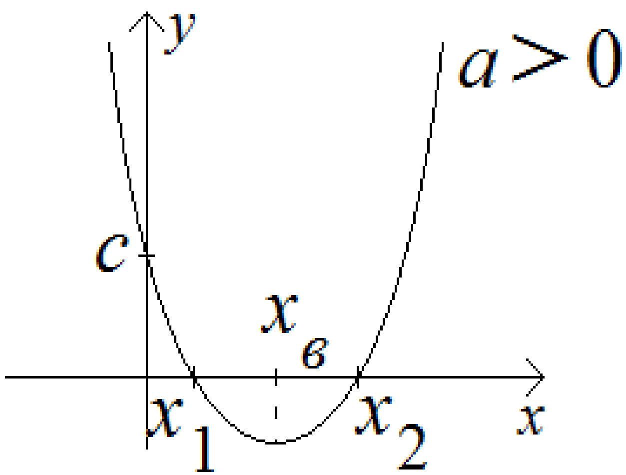


$$y - y_0 \le \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$



$$y - y_0 > -\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}$$

Уравнение параболы и неравенства, которые связаны с ним

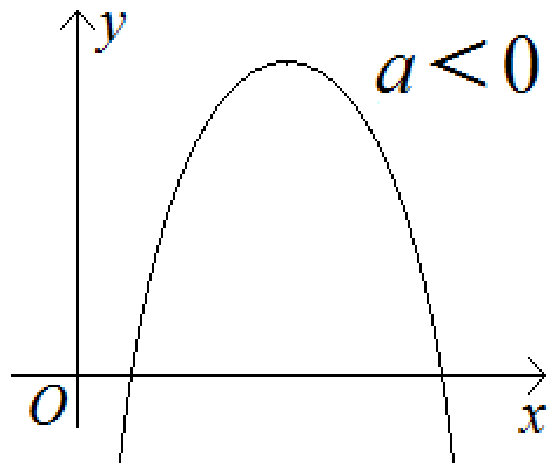


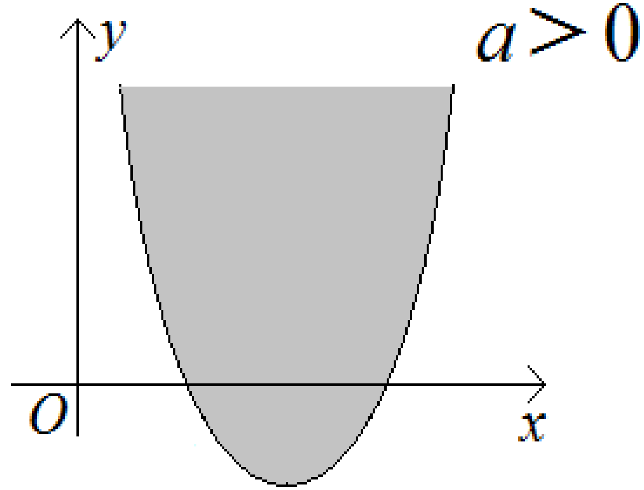
$$y = ax^2 + bx + c$$

$x_в = -\dfrac{b}{2a}$ - абсцисса вершины параболы

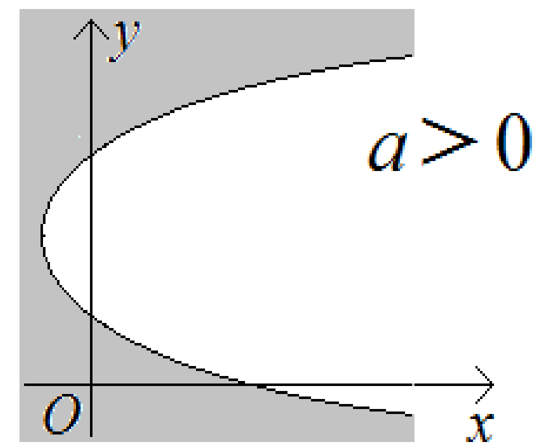
$x_1\ x_2$ - корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

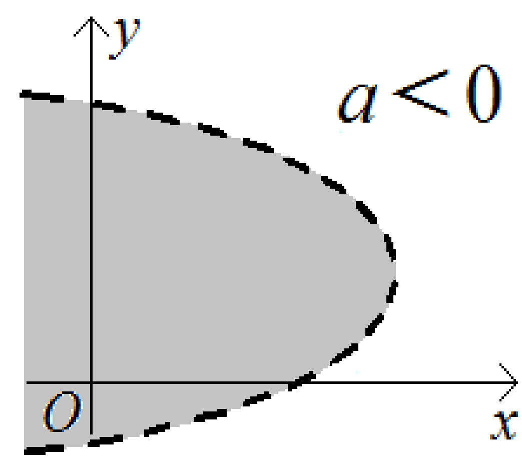




$$y \geq ax^2 + bx + c$$

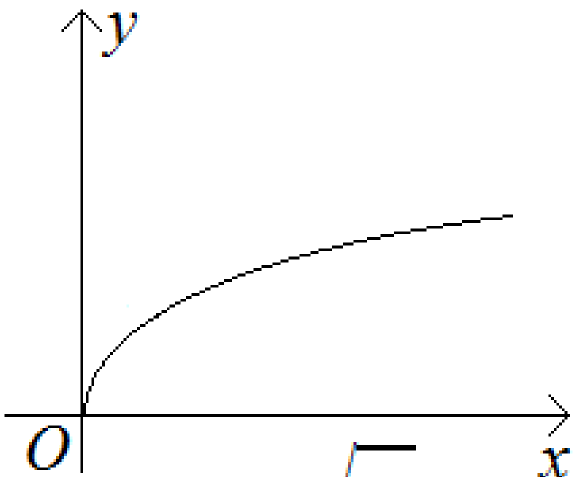


$$x \leq ay^2 + by + c$$

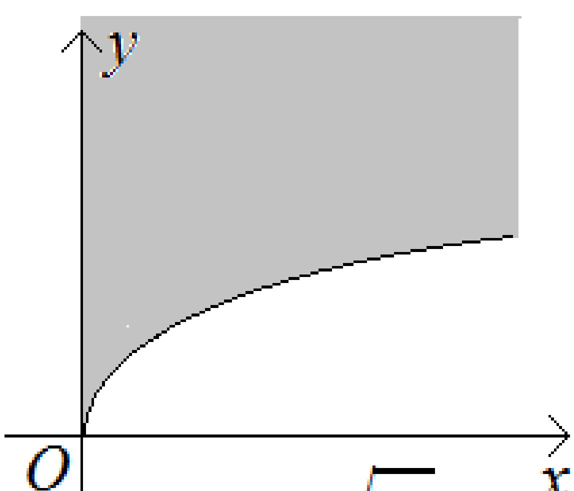


$$x < ay^2 + by + c$$

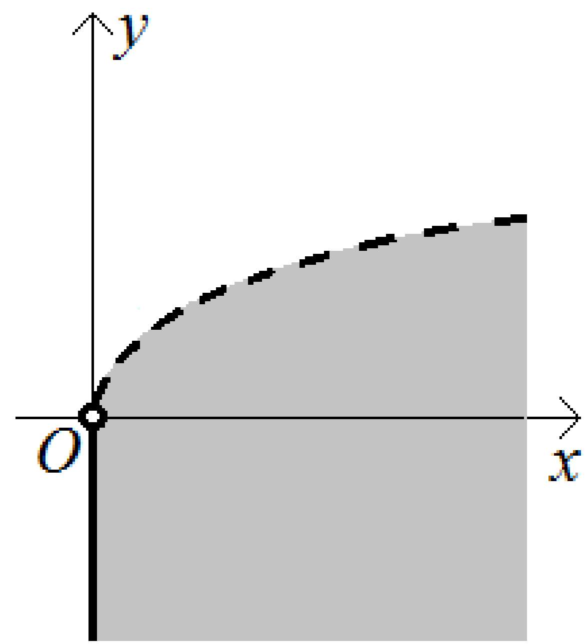
Квадратный корень и связанные с ним неравенства



$y = \sqrt{x}$



$y \geqslant \sqrt{x}$



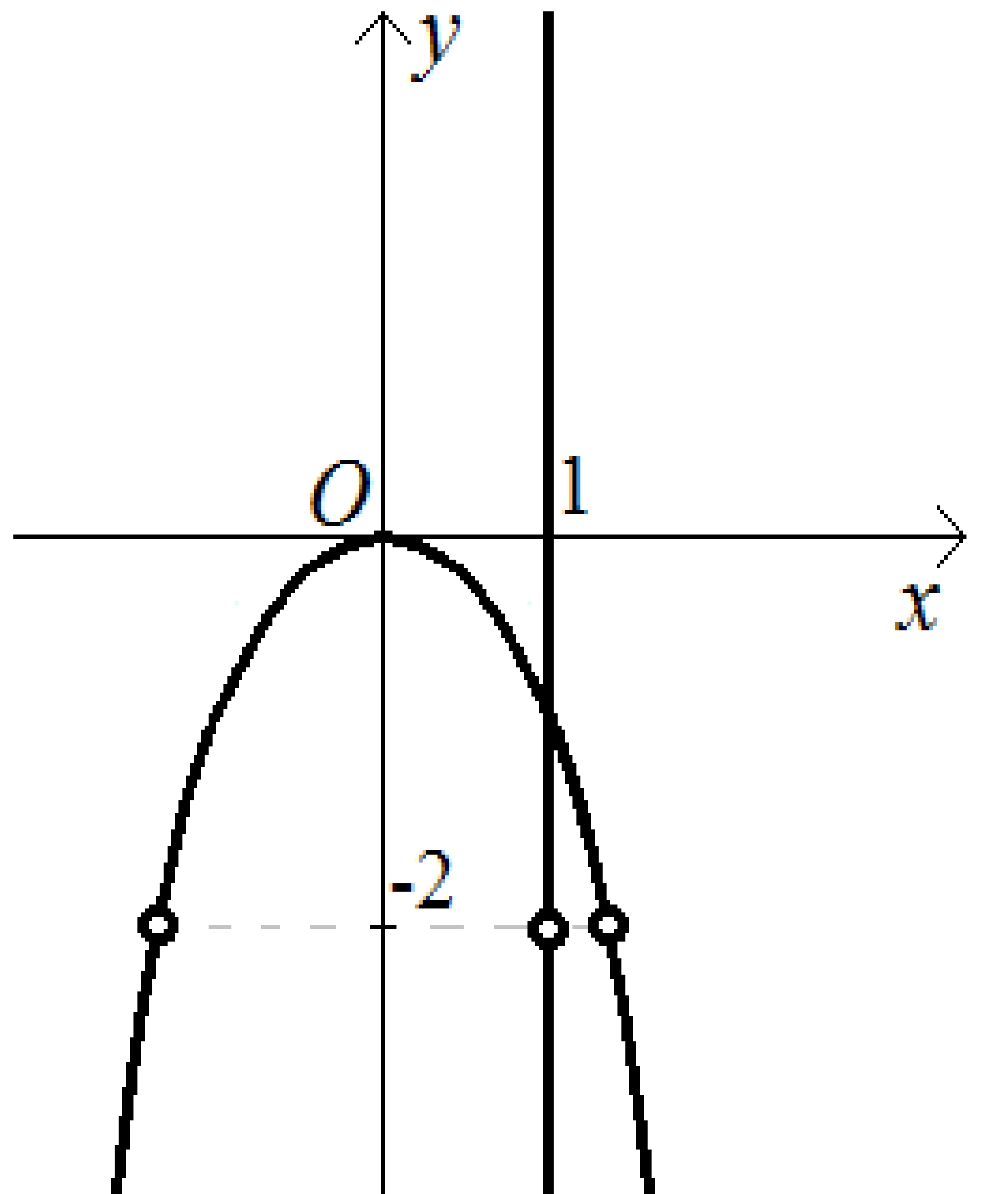
$y < \sqrt{x}$

Замечание

Для построения окружностей и парабол часто применяется выделение полного квадрата.

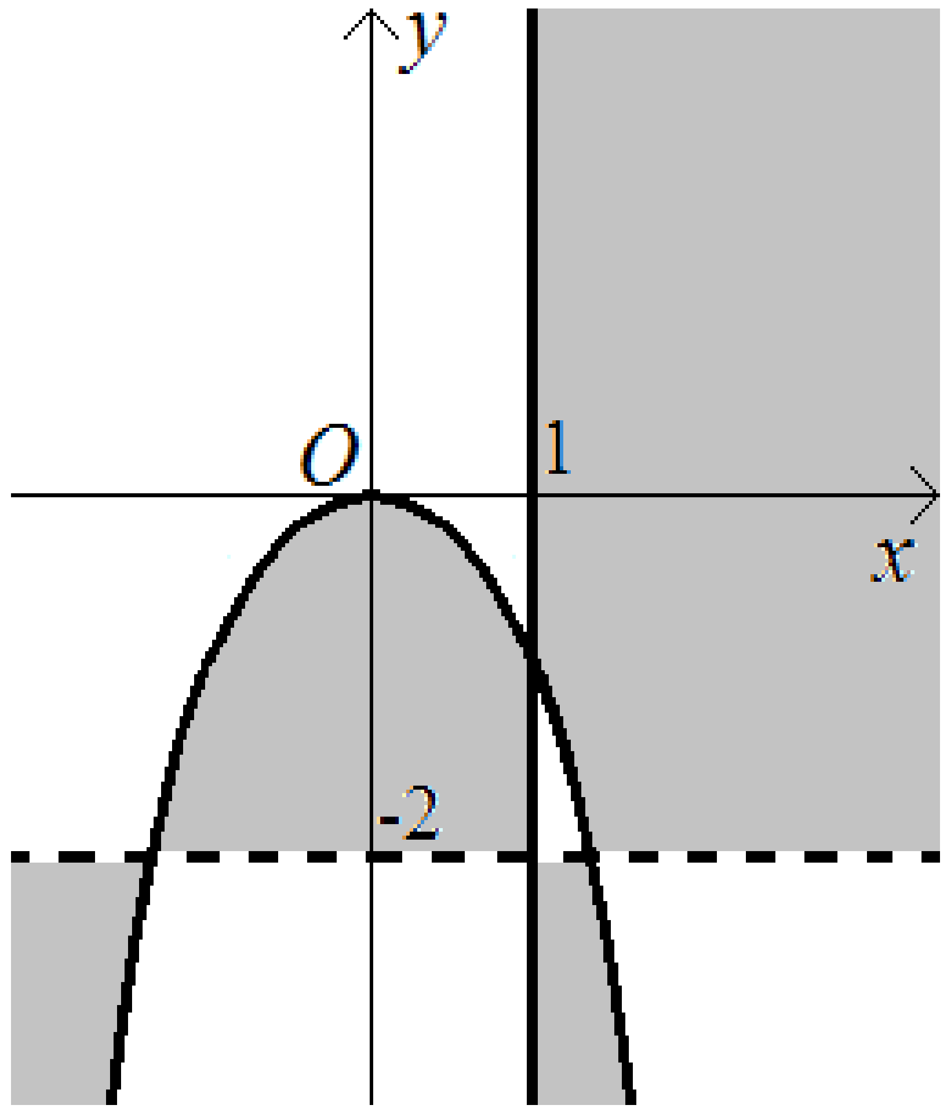
Линии, задаваемые уравнениями указанного вида

$$\frac{(x-1)(x^2+y)}{(y+2)}=0$$



Области, задаваемые неравенствами указанного вида

$$\frac{(x-1)(x^2+y)}{(y+2)} \geqslant 0$$



Построение графиков функций

Для построения графиков функций (например, для построения графика $a=f(x)$) обучающиеся должны уметь находить промежутки возрастания (убывания) функций, экстремумы и асимптоты.

Используя производную, свойства элементарных функций, преобразование графиков.

Расстояние между двумя точками на плоскости

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ - расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

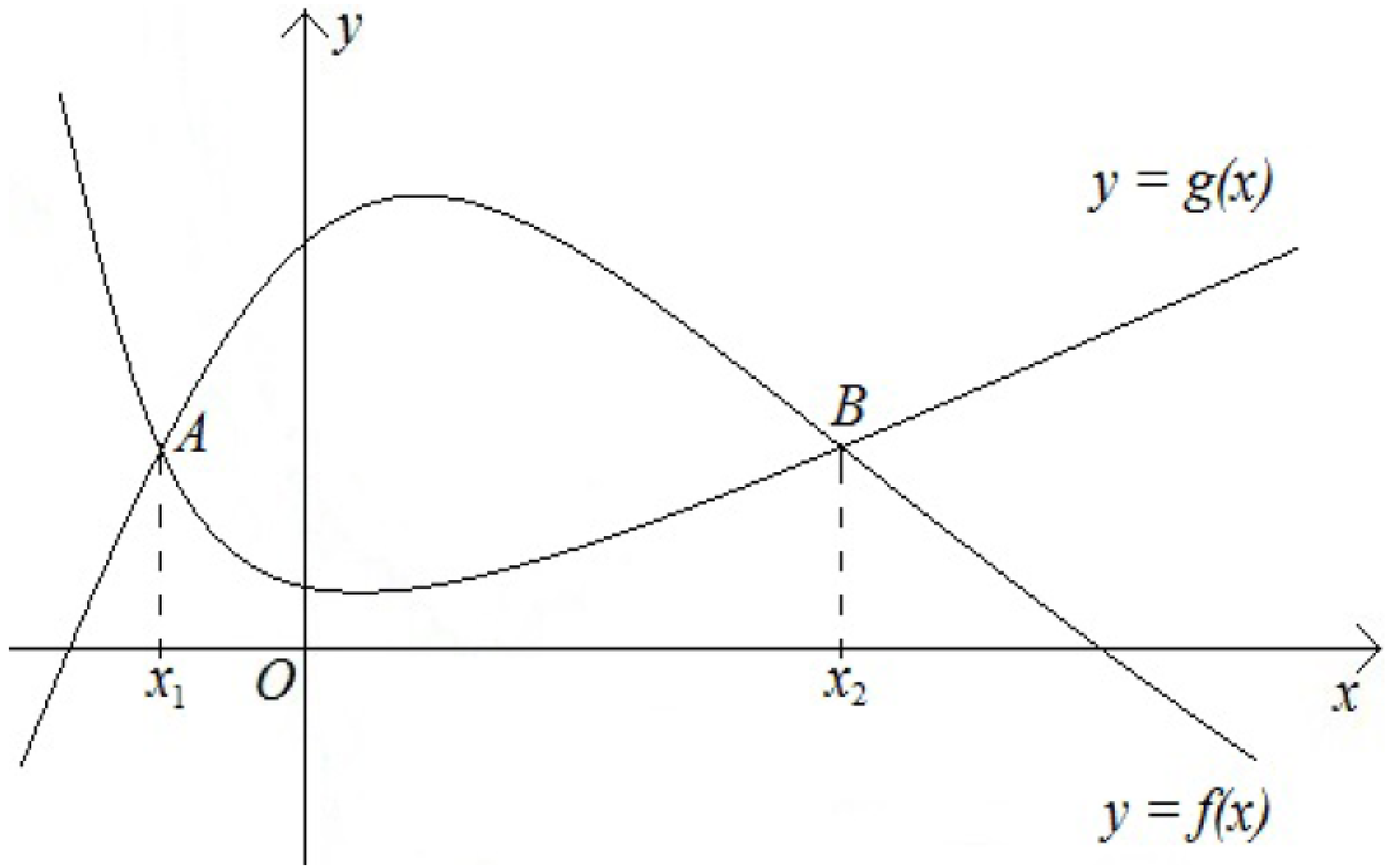
Методы, применяемые при графическом способе решения

Построение в координатах Oxy

Уравнение вида $f(x)=g(x)$

Построим в координатах Oxy графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

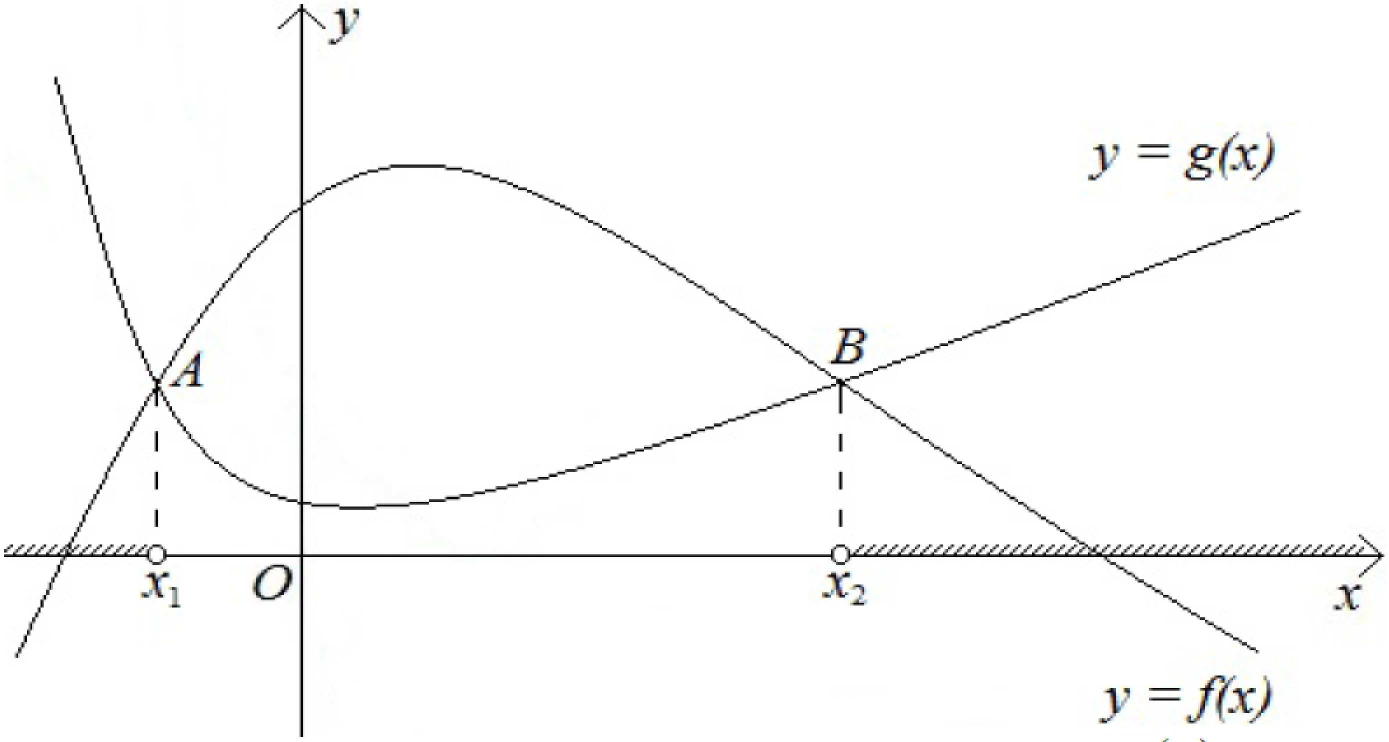
Сколько точек пересечения у построенных графиков – столько и корней у данного уравнения. В данном случае уравнение имеет два корня x_1 и x_2.



Построение в координатах Oxy

Неравенство вида $f(x) < g(x)$

Построим в координатах Oxy графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

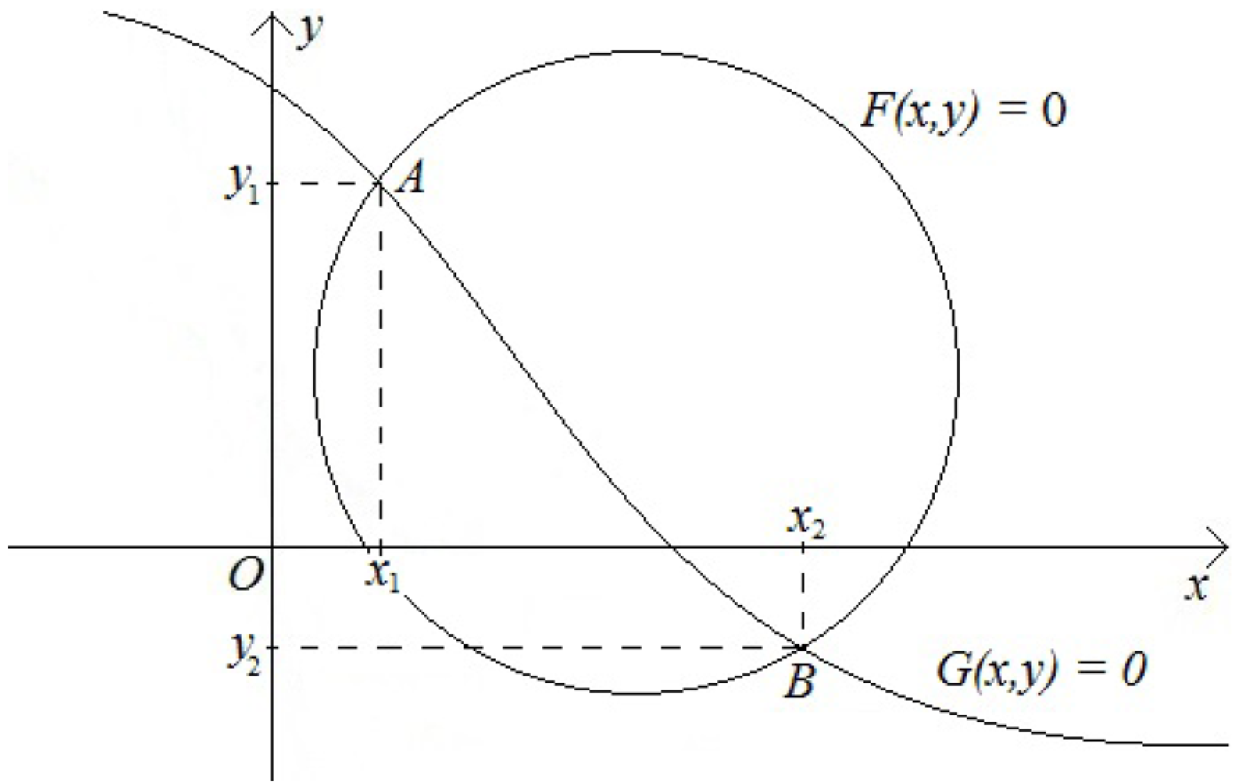


Найдем промежутки, на которых график функции $y = f(x)$ лежит ниже графика функции $y = g(x)$. Объединив полученные промежутки, найдем решение данного неравенства – множество $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Построение в координатах Oxy

Система уравнений вида $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ G(x,y)=0. \end{cases}$

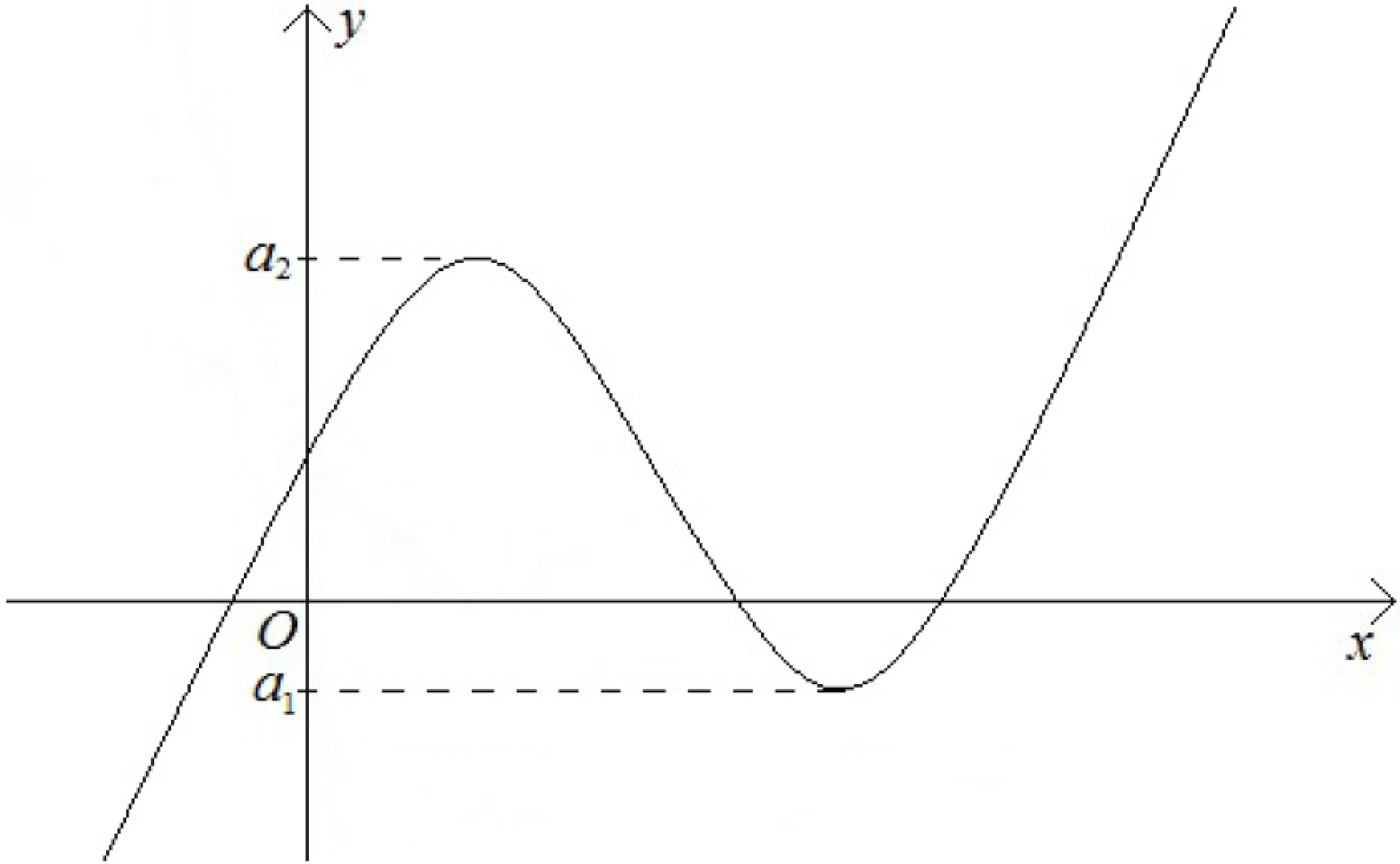
Построим в координатах Oxy линии, заданные уравнениями $F(x,y)=0$ и $G(x,y)=0$.



Сколько точек пересечения у построенных линий – столько система уравнений имеет решений. В данном случае система уравнений имеет два решения: (x_1, y_1) и (x_2, y_2).

Построение в координатах Oxa

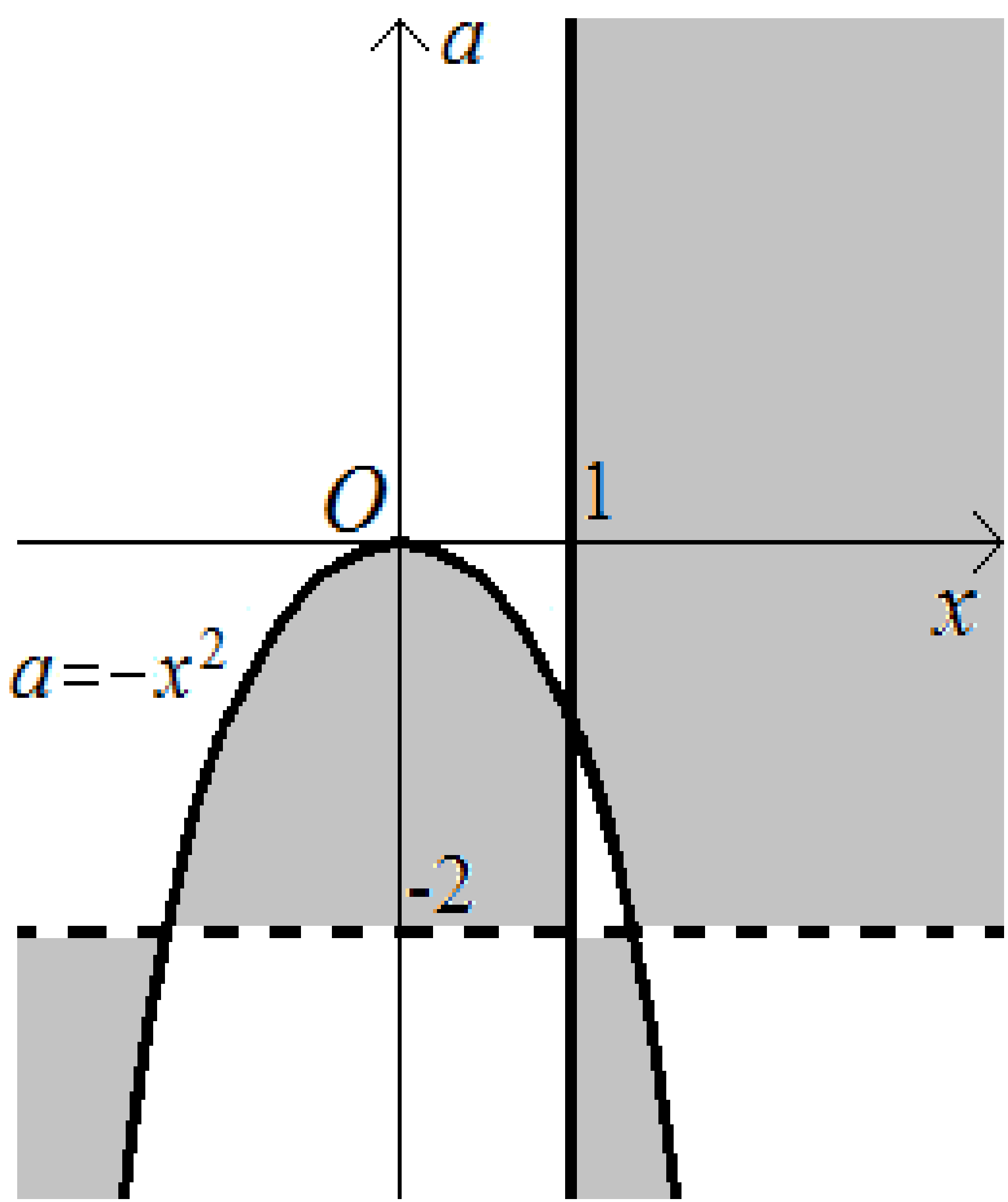
Уравнение с параметром. Предположим, что нам удалось выразить a через x. Построим график функции $a = f(x)$.



Из полученного чертежа сразу можно сделать вывод, что данное уравнение при $a \in (-\infty; a_1) \cup (a_2; +\infty)$ имеет один корень, при $a = a_1$ и $a = a_2$ два корня, а при $a \in (a_1; a_2)$ – три корня.

Построение в координатах Oxa

(метод областей)



По данному чертежу можно определить следующее.

1. Как зависит структура решения неравенства от параметра.

Пример: решение неравенства является объединением двух промежутков при $a \in (-\infty;\,-2) \cup (-2;\,-1) \cup (-1;\,0)$.

2. Найти решение неравенства при всех значениях a.

Пример: $x \in (-\infty;\,-\sqrt{-a}] \cup [1;\,\sqrt{-a}]$ при $a \in (-\infty;\,-2)$.

3. Найти все значения параметра при которых неравенство в данном промежутке имеет хотя бы одно решение (все точки данного промежутка являются решениями данного неравенства.

Пример: отрезок $[2;\,3]$ содержит хотя бы одно решение данного неравенства при $a \in (-\infty;\,-4] \cup (-2;\,+\infty)$.

Применение геометрических методов

После выполнения всех построений по данной задачи иногда для нахождения значений параметров приходится решать геометрические задачи (нахождение расстояний, решение прямоугольных треугольников и т.д.).

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Данный способ заключается в использовании стандартных методов, применяемых для решения аналогичных задач без параметра.

Как правило, данный способ является наиболее трудным.

Рекомендации и материалы к аналитическому методу

Рекомендации к аналитическому методу

1. Предварительно следует получить навыки уверенного решения задач 13 и 15.
2. При решении как правило используются равносильные преобразования уравнений (неравенств). При использовании, например, метода универсальной тригонометрической подстановки значения при которых она не определена проверяются отдельно.
3. Если при использовании некоторого метода исключаются значения параметра и неизвестной, то это не значит, что в этих случаях задача не имеет решения. В этих случаях применяются другие методы решения.
4. При успользовании аналитического метода решение имеет часто разветвляющуюся структуру. При "разветвлении" решения следует сразу задать с помощью неравенств условия применимости каждого используемого метода. При этом в конце решения следует проверить все ли значения параметра рассмотрены и нет ли дублирования. Кроме того, при каждом значении параметра должны быть рассмотрены все значения неизвестного (неизвестных).
5. Тип уравнения (неравенства) может зависить от параметра.

Рекомендации к аналитическому методу

6. При умножении (делении) неравенства на выражение с параметром и неизвестной, слудет всегда рассматривать 2 случая:

1) выражение положительно – знак неравенства не меняется;

2) выражение отрицательно – знак неравенства меняется на противоположный.

7. Под ОДЗ следует понимать множество пар (x,a) при которых обе части уравнения (неравенства) имеют смысл. Нахождение ОДЗ иногда почти решает задачу. Например, когда ОДЗ состоит из нескольких точек, которые проверяются проверкой. Иногда найти ОДЗ очень трудно: тогда его записывают в виде неравенств. При решении с помощью <u>только</u> равносильных преобразований нахождение ОДЗ необязательно.

К решению иррациональных уравнений и неравенств

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) \geqslant 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

К решению задач с параметром на свойства функций

Обучающиеся должны уметь находить промежутки возрастания (убывания) функций, экстремумы и асимптоты.

Используя производную, свойства элементарных функций, преобразование графиков.

«Нестандартные» задания

Задача с параметром может содержать одновременно, например, $\sin x$ и $\ln x$. В этом случае решение задачи типовыми методами невозможно. Кроме того, задача может иметь настолько сложный вид, что её решение типовыми методами весьма проблематично.

В таких случаях целесообразно попытаться применить:

1) монотонность функций;

2) ограниченность функций;

3) введение вспомогательной функции;

4) соображения симметрии (инвариантность);

5) необходимые условия.

Использование монотонности

Пусть на некотором промежутке одна часть уравнения является возрастающей функцией, а другая – убывающей функцией. Тогда на этом промежутке уравнение имеет не более одного решения. Оно находится подбором.

Одна из частей уравнения может быть константой.

Использование ограниченности

Пусть для уравнения $f(x)=g(x)$ выполняется $\max\limits_{x\in I} f(x)=\min\limits_{x\in I} g(x)=m$,

тогда на промежутке I данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x)=m, \\ g(x)=m. \end{cases}$

Пусть для уравнения $f(x)=g(x)$ выполняется $\max\limits_{x\in I} f(x)<\min\limits_{x\in I} g(x)$,

тогда на промежутке I данное уравнение не имеет решений.

Замечание. Для неравенств также возможно соображений ограниченности.

Введение вспомогательной функции

Если в уравнении (неравенстве) одни и теже выражения повторяется (возможно после преобразований) 2 раза, то бывает целесообразно ввести вспомогательную функцию. Вид которой можно получить, если разделить повторяющиеся выражения в разных частях уравнения (неравенства).

Соображения симметрии (инвариантность)

1. Если уравнение инвариантно (неизменно) при замене x на (-x), то его множество его решений симметрично относительно x=0. В частности, единственным решением уравнения может быть только x=0.

2. Если уравнение инвариантно (неизменно) при замене x на 1/x, то единственным решением уравнения может быть только x=1 или x= -1.

3. Для систем также можно применять соображения симметрии (инвариантности).

Замечание. Проверка обязательна.

Примеры применения необходимых условий

1. Необходимым условием, чтобы *x* было решением уравнения (неравенства) является принадлежность x к ОДЗ. Если ОДЗ состоит из несколький точек, то решения из них отбираются проверкой.

2. Пусть, если x – решение, то и (-x) -решение, тогда единственным решением может быть только 0. Подставляем x=0 в уравнение, находим значения параметра и для каждого значения делаем проверку.

3. Пусть требуется найти все значения параметра, чтобы решениями задачи были все x из некоторого промежутка. Пусть при некотором таком x легко находятся несколько значений параметра. Для найденных значений надо обязательно делать проверку.

При применении необходимых условий проверка обязательна.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРА

При решении данным методом x и a как бы меняются местами: a полагается переменной, а x - параметром. После решения задачи возвращают первоначальный смысл переменным x и a.

Данный способ удобен, если аналитическое решение задачи относительно a является более простым. Например, когда уравнение относительно x имеет высокую степень, а относительно а является линейным или квадратным.

Литература

1. Моргулис, А.Я. Внимание: в уравнении параметр / А.Я. Моргулис, А.Г. Мордкович, Б.А. Радунский // Квант. - 1970. - № 9. - С. 19-25.

2. Моргулис, А.Я. Решая неравенство с параметром… / А.Я. Моргулис, А.Г. Мордкович, Б.А. Радунский // Квант. - 1970. - № 10. - С. 51-59.

3. Шестаков, С.А. ЕГЭ 2019. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2019.—288 с. ISBN 978-5-4439-1328-5

4. www.kvant.info/old.htm

5. https://ege.sdamgia.ru/

6. Горнштейн, П. Необходимые условия и задачи с параметрами / П. Горнштейн, В. Полонский, М. ЯкирА. // Квант. - 1991. - № 11. - С. 44-49.

Литература

7. Фалин, Г. Инвариантность и задачи с параметрами / Г. Фалин, А. Фалин // Квант. - 2007. - № 5. - С. 45-47.

8. Егоров, А. Решим относительно параметра / А. Егоров // Квант. - 1997. - № 4. - С. 43-46.

9. Павленко, А.Н. Задачи с параметрами: методические указания к выполнению домашних заданий и подготовке к контрольным работам / А.Н. Павленко, О.А. Пихтилькова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2018.