Л. В. Кирсанова

Финансовая математика в ЕГЭ по математике профильного уровня

ISBN 978-5-00217-353-2
www.editus.ru
9 785002 173532 >

Л. В. Кирсанова

Финансовая математика в ЕГЭ по математике профильного уровня

Учебно-методическое пособие для учителей математики и учащихся 10-11 классов

Издательство Эдитус
Москва

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721
К43

Рецензент: Ирина Анатольевна Ледовских,
доцент с ученой степенью кандидат наук и ученым званием доцент, высшая школа естественных наук, математики и информационных технологий ТОГУ г. Хабаровск.

Кирсанова Л. В.

К43 **Финансовая математика в ЕГЭ по математике профильного уровня.** — М.: Эдитус, 2024. — 158 с.

ISBN 978-5-00217-353-2

Учебно-методическое пособие содержит теоретический материал для решения задач финансовой математики из ЕГЭ по математике профильного уровня, примеры решения различных типов задач, задачи для самостоятельной работы с краткими ответами. В приложениях указаны проверяемые требования (умения), элементы содержания и критерии оценивания, типичные ошибки при решении задач финансовой математики, методические рекомендации обучения решению задач финансовой математики.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-00217-353-2

Содержание

Введение

Учебно-методическое пособие «Финансовая математика в ЕГЭ профильного уровня» содержит: введение, 2 основные главы (экономические задачи и задачи на оптимальный выбор), приложения и список литературы.

Каждая из двух глав содержит:

- теоретический материал по теме;
- классификацию задач;
- методы решения задач;
- примеры решения задач с подробным объяснением;
- задачи для самостоятельной работы;
- краткие ответы к задачам для самостоятельной работы.

Пособие включает в себя 3 приложения.

Приложение 1 содержит проверяемые требования (умения), элементы содержания и критерии оценивания.

Приложение 2 содержит перечень типичных ошибок при решении задач финансовой математики.

Приложение 3 содержит методические рекомендации обучения решению задач финансовой математики.

Пособие не содержит подробных решений задач для самостоятельной работы, только краткие ответы. С подробными решениями задач этого раздела можно ознакомиться в решебнике автора.

I. Экономические задачи
Теоретический материал
Ключевые «финансовые» определения

Экономика – сложная система использования природных, трудовых и других ресурсов, позволяющих производить блага, удовлетворяющие потребности отдельного человека и общества в целом. Как наука экономика – это система отраслевых и функциональных научных дисциплин, рассматривающих отдельные стороны общественного производства. Теоретической и методологической основой этой системы служит экономическая теория.

Банки – специализированные организации, осуществляющие движение денежных средств. Осуществляют концентрацию свободных денежных средств и перераспределение денежной массы, обслуживают правительство, производителей и население. Чаще всего существуют в форме акционерных обществ.

Процентная ставка – сумма, указанная в процентном выражении к сумме кредита, которую платит получатель кредита за пользование им в расчёте на определённый период. С позиции теории денег, процентная ставка — цена денег как средства сбережения.

Банковский кредит – предоставление банками во временное пользование денежных ссуд физическим и юридическим лицам. Различают ссуду денег и ссуду капитала. Ссуды денег обслуживают лишь движение денег как платежного средства, используется на погашение ранее выданных долговых обязательств в целях предотвращения банкротства и не сопровождается расширением производства.

Банковский вклад – сумма денег, переданная лицом кредитному учреждению с целью получить доход в виде процентов, образующихся в ходе финансовых операций со вкладом.

Ценная бумага – документ, удостоверяющий, с соблюдением установленной формы и обязательных реквизитов, имущественные права, осуществление или передача которых возможны только при его предъявлении. Гражданский кодекс РФ также определяет, что с передачей ценной бумаги все указанные ею права переходят в совокупности.

Акция – ценная бумага, дающая владельцу право на долю в компании, участие в управлении ею, а также на долю в ее прибыли в виде дивидендов.

Дифференцированные платежи – один из способов погашения кредита, при котором размер ежемесячного платежа ближе к концу срока постепенно уменьшается. Это происходит за счет равномерного уменьшения тела кредита, которое влечет за собой уменьшение суммы начисляемых процентов. В результате в начале срока кредита ежемесячные взносы будут наиболее крупными, однако по мере приближения к концу срока они будут становиться все меньше и меньше.

Аннуитетные платежи – тип выплат, при котором вы каждый месяц перечисляете банку одну и ту же сумму. При этом первые выплаты идут на погашение процентов, тогда как тело (изначальная сумма долга) почти не уменьшается. Поскольку проценты начисляют на остаток задолженности, чем больше вы платите, тем меньше приходится на проценты и тем больше снижается основной долг. Подходит тем, кто хочет платить одну и ту же сумму каждый месяц.

Транш – часть финансового потока, размер которой определяется договором между кредитором и заёмщиком. Потраншевое финансирование обычно применяется в банковской и предпринимательской среде при реализации крупных проектов, требующих значительных денежных затрат. В простом понимании транш — это часть заёмных средств, которые поступают от одного субъекта другому. Деньги могут поступать не только от кредитора заёмщику, частями возможно погашать долги при заключении соответствующего соглашения.

Капитал – любой ресурс компании, который потенциально способен приносить прибыль. В это понятие входят как финансовые инструменты — собственные деньги, ценные бумаги, заемные средства — так и оборудование, технологии, сырье, товарные знаки, а также идеи и концепции. Виды капитала по-разному определяются в различных классификациях, в зависимости от их назначения. Но есть и основные принципы: капитал может определяться по его принадлежности, по форме инвестирования или по объекту инвестирования.

Льготный кредит – кредит с процентной ставкой ниже рыночной. Это также известно как льготное финансирование. Иногда льготные кредиты предоставляют другие льготы для заёмщиков, такие как длительные периоды погашения или отпуск по интересам.

Основное о процентах

Процентом называют сотую часть чего-либо, принимаемого на единицу, т.е. $1\% = \frac{1}{100}$.

Чтобы найти данное число процентов от числа, нужно проценты записать десятичной дробью, а затем число умножить на эту десятичную дробь.

При решении задач необходимо понимать механизм начисления процентов по вкладам или кредитам. Например, если банк выдает кредит (S) клиенту, то через год клиент должен банку не только сумму кредита, но и некий процент (p). Возникает необходимость введения нового коэффициента ($k = 1 + 0{,}01p$). С учётом этого, долг клиента банку через год можно записать следующим образом:

$$S + p\% \text{ от } S = S + 0{,}01pS = S(1 + 0{,}01p) = kS$$

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — это тип числовой последовательности, где разница между каждыми двумя последовательными членами — постоянное число. Такое число называется разностью арифметической прогрессии.

Свойства арифметической прогрессии тесно связаны с принципами её построения.

1) Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, увеличенному на разность

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

2) Элемент a_n – это всегда среднее арифметическое значение от соседних членов

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

Исключение: первый a_1 и последний a_n элементы, которые не имеют соседнего с одной из сторон.

Для нахождения любого a_n можно использовать следующую формулу:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

где:

- a_n – n-й элемент;
- a_1 – первый элемент;
- n – порядковый номер;
- d – разность арифметической прогрессии.

Разность арифметической прогрессии d равна разнице между любыми двумя соседними элементами последовательности:

$$d = a_n - a_{n-1}.$$

Сумму можно вычислить по формуле:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n,$$

где:

- a_1 – первый элемент;
- a_n – n-й элемент;
- n – количество элементов.

Геометрическая прогрессия

Последовательность (b_n), в которой каждый последующий член можно найти, если предыдущий член умножить на одно и то же число q, называется геометрической прогрессией.

Если последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, то для любого натурального значения n справедлива зависимость:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Если в геометрической прогрессии (b_n) известен первый член b_1 и знаменатель q, то возможно найти любой член прогрессии:

$$b_2 = b_1 \cdot q; b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2 \text{ и т.д.}$$

Общий член геометрической прогрессии b_n можно вычислить, используя формулу:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

где:

- n – порядковый номер члена прогрессии;
- b_1 – первый член последовательности;
- q – знаменатель.

Сумму первых n членов геометрической прогрессии S_n можно найти, если вычислить ее члены $b_1, b_2, \dots, b_n$ и затем их сложить.

1-я формула: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$,

- b_1 – первый член геометрической прогрессии;
- b_n – n-ый член геометрической прогрессии;
- q – знаменатель;
- n – количество членов последовательности (порядковый номер).

2-я формула: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$.

Линейное уравнение

Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, и a, b – некоторые числа, называется линейным уравнением с одной неизвестной.

a – коэффициент при неизвестной,

b – свободный член линейного уравнения.

Возможны три случая:

1) Если $a \neq 0$, b – любое число, то линейное уравнение имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$.

2) Если $a = 0$, $b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

3) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней, то есть количество корней уравнения равно нулю.

С помощью равносильных преобразований любое уравнение, в которое переменная входит только в первой степени, можно преобразовать к уравнению вида $ax = b$. Для этого нужно все слагаемые, содержащие неизвестную, перенести в одну часть уравнения (обычно в левую часть), а все числовые слагаемые перенести в другую часть, после чего привести подобные.

Алгоритм решения линейного уравнения

1) Раскрыть скобки, то есть умножить каждое слагаемое в скобках на число за скобками. Не забыть при умножении на отрицательное число знак каждого слагаемого в скобках поменять на противоположный.

2) Привести подобные слагаемые в правой и левой частях уравнения.

3) Слагаемые с неизвестным перенести в левую часть уравнения, а числовые слагаемые — в правую. При переносе не забыть поменять знак слагаемого на противоположный.

4) Привести подобные слагаемые в правой и левой частях уравнения.

5) Разделить обе части уравнения на число перед неизвестным (если это число не равно нулю).

6) Записать ответ.

Квадратное уравнение

Дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ называется величина $D = b^2 - 4ac$.

Если рассматривать квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, то величину $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения.

Пусть $ax^2 + bx + c = 0$ – квадратное уравнение, тогда значение $D = b^2 - 4ac$ – его дискриминант. Тогда:

- если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет решений;

- если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет одно решение, которое находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$;

- если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два решения, которые находятся по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

В случае, когда коэффициент b уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ является четным числом, корни уравнения можно находить по следующей формуле: $x_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}$, где $b_1 = \frac{b}{2}$.

Теорема Виета для квадратного уравнения:

если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет решения (то есть $D \geq 0$), то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Если $D = 0$, то есть уравнение имеет всего одно решение x, то в равенствах теоремы Виета полагают $x_1 = x_2 = x$.

Для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ согласно теореме Виета верно следующее: $x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q$, то есть произведение корней равно третьему коэффициенту, а сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком.

Системы уравнений

1. Метод подстановки

Алгоритм:

1) одна переменная из одного линейного уравнения выражается через другую переменную;

2) выраженная переменная подставляется в другое уравнение системы;

3) полученное уравнение, содержащее только одну переменную, решается относительно этой переменной;

4) значение переменной, полученное в пункте 3, подставляется в выражение для другой (первой) переменной (см. пункт 1);

5) записать ответ.

2. Алгебраическое сложение

Алгоритм:

1) уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных (если необходимо);

2) сложить или вычесть уравнения;

3) решить полученное уравнение с одной переменной, найти неизвестное;

4) подставить найденное значение переменной в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное;

5) записать ответ.

Линейное неравенство

Линейным неравенством с одним неизвестным x называется неравенство, которое может быть представлено одним из четырех видов:

$$kx + b > 0; kx + b < 0; \; kx + b \geq 0; kx + b \leq 0.$$

Решить неравенство означает найти множество всех удовлетворяющих ему чисел.

Если в линейном неравенстве $k = 0$, то неравенство превращается в числовое неравенство, которое либо справедливо, либо нет. В первом случае множеством решений неравенства будет вся числовая прямая; во втором случае множество решений пусто.

Если же $k \neq 0$, то множеством решений неравенства является промежуток вида: $(a; +\infty)$; $[a; +\infty)$; $(-\infty; a)$; $(-\infty; a]$.

Решить линейное неравенство так же просто, как и решить линейное уравнение: надо перенести все слагаемые с неизвестной в одну сторону, а все числа — в другую, привести подобные, а затем поделить на коэффициент при неизвестной x (учесть знак, если делим на отрицательно число, то знак неравенства меняется на противоположный, если число положительное, то знак неравенства остается прежним).

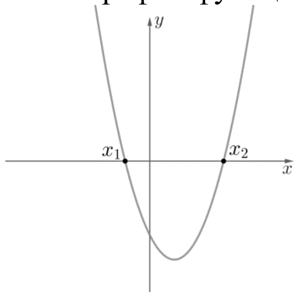
Квадратное неравенство

Квадратными называют неравенства вида:

$$ax^2 + bx + c > 0; \; ax^2 + bx + c < 0;$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0; \; ax^2 + bx + c \leq 0.$$

Рассмотрим параболу с положительными старшим коэффициентом и положительным дискриминантом, то есть пусть $a > 0$ и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня $x_1 < x_2$.

Изобразим схематично график функции $y = ax^2 + bx + c$.



Из рисунка видно, что $y > 0$, когда x либо меньше меньшего корня x_1 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, либо больше большего x_2. Значит, решением неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ является $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

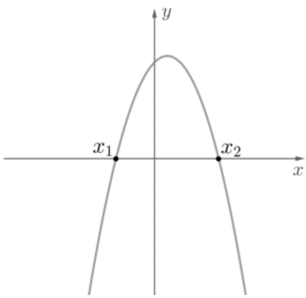
Тогда, $y < 0$, когда x находится между корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Значит, решением неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ будет интервал $(x_1; x_2)$.

Для нестрогих неравенств имеем соответственно:

$ax^2 + bx + c \geq 0 => (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$;

$ax^2 + bx + c \leq 0 => [x_1; x_2]$.

Пусть теперь $a < 0$ и квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ также имеет два различных корня $x_1 < x_2$. Изобразим схематично график $y = ax^2 + bx + c$.



Из рисунка видно, что в этом случае ситуация, обратная ситуации с положительным значением коэффициента a. То есть $y > 0$, когда x лежит между корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Решением неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ будет интервал $(x_1; x_2)$.

Далее, $y < 0$, если x меньше меньшего корня x_1 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, либо больше большего x_2. Значит, решением неравенства $ax^2 + bx + c < 0$ будет объединение промежутков $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Для нестрогих неравенств при $a < 0$ имеем соответственно:

$ax^2 + bx + c \leq 0 => (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$;

$ax^2 + bx + c \geq 0 => [x_1; x_2]$.

x либо меньше меньшего корня x_1 данного квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, либо больше большего x_2. Значит, решением неравенства $ax^2 + bx + c > 0$ будет объединение промежутков $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

В ситуации, когда квадратное уравнение имеет единственный корень или не имеет корней, рассуждения аналогичны, и можно их результаты свести в следующую таблицу.

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$a > 0$, $D > 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$[x_1; x_2]$
$a > 0$, $D = 0$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	все вещественные числа	$x \in \varnothing$	x_0
$a > 0$, $D < 0$	все вещественные числа	все вещественные числа	$x \in \varnothing$	$x \in \varnothing$
$a < 0$, $D > 0$	$(x_1; x_2)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$a < 0$, $D = 0$	$x \in \varnothing$	x_0	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	все вещественные числа
$a < 0$, $D < 0$	$x \in \varnothing$	$x \in \varnothing$	все вещественные числа	все вещественные числа

Системы неравенств

Системой неравенств называется несколько неравенств, для которых требуется найти множество всех решений, являющихся одновременно решениями каждого неравенства системы.

Для соединения неравенств в систему слева изображают фигурную скобку.

Решить систему неравенств значит найти все числа (наборы чисел), удовлетворяющие всем неравенствам системы одновременно.

Для решения системы неравенств следует решить каждое неравенство по отдельности, а затем пересечь все полученные множества решений.

Классификация задач

Экономические задачи, в свою очередь, делятся на задачи про кредиты и вклады. Также, задачи на кредиты бывают с дифференцированными платежами (разными), аннуитетными платежами (равными) или равномерно уменьшающимися платежами. Данные группы делятся по вопросу:

- поиск суммы, взятой в кредит;
- поиск размера платежа или суммы платежей по кредиту;
- поиск процентной ставки;
- поиск срока оплаты кредита.

К задачам с равномерно уменьшающимися платежами, также, относится подтип задач с дополнительным условием.

Методы решения экономических задач

Любая задача должна содержать построение модели. Математической моделью задачи называют отражение реальной (производственной, экономической) ситуации в виде функций, уравнений и неравенств, систем уравнений и неравенств.

Для построения модели удобно рассматривать сумму долга каждый год/месяц (для удобства, если в задаче не сказано, можно взять конкретные месяцы или числа месяца, когда кредит взяли, когда начислили процент, когда выплатили часть долга). Если количество лет/месяцев достаточно большое, то следует описать несколько первых и проследить закономерность.

Вычисления выгодно делать после преобразования полученной модели, чтобы исключить появление вычислительных ошибок и облегчить счет (иногда до устного). Часто задачи составлены так, что неудачная последовательность действий сделает их нерешаемыми без калькулятора. Поэтому не надо спешить делать первое попавшееся действие, следует тренироваться думать на несколько шагов вперед.

Для решения задач можно использовать формулу сложных процентов:

Если в банк положили сумму S под $r\%$ годовых, то через n лет на счету будет сумма $S \cdot (1 + r\%)^n = S(1 + 0{,}01r)^n$.

Формула сложного процента – это формула, по которой рассчитывается неоднократное изменение числа на какой-либо процент, при этом следующее увеличение происходит не на изначальную сумму, а на накопленную, то есть уже увеличенную в прошлый раз.

Если в задаче требуется найти размер процентной ставки, то удобно вводить замену: $k = 1 + \frac{r}{100}$, где r – неизвестная процентная ставка, тогда k – во столько раз увеличивается долг по кредиту.

Обозначения: S – сумма кредита/вклада, n – срок (лет, месяцев), $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – платежи (если одинаковые, то обозначают за x), p – процентная ставка. Если в задаче сравнение нескольких вариантов выплат по кредиту или начислений по вкладу, то следует использовать индексы.

Рассмотрим типы экономических задач и особенности их решения на примерах.

Первые 4 типа относятся к задачам на кредиты. Это одни из самых трудных экономических задач, т.к. на начальном этапе учащиеся плохо понимают условие задачи: когда начисляют проценты, сколько возвращают, когда списывают, на какую сумму снова начисляют, из каких частей состоит платеж и т.д. Задачи на кредиты чаще всего встречаются на реальных вариантах ЕГЭ по математике профильного уровня. Следовательно, этому типу задач надо уделить особое внимание. Отметим несколько важных методических особенностей при обучении решению этих задач:

Во-первых, при решении задач на кредиты появляется хорошая возможность показать взаимосвязь уроков математики с реальной жизнью. При рассмотрении этой темы появляется повод рассказать ученикам о том, какие бывают образовательные кредиты, какие обязательные дополнительные расходы придется купить в виде страховки жизни, жилья, о том, что к кредитам надо подходить очень ответственно.

Во-вторых, при решении экономических задач рекомендуется научить учащегося упорядочивать данные по кредиту с помощью таблицы. Это один из наиболее легких для понимания ученика способов отслеживания данных (долг на начало отчетного периода, начисление процентов, выплата, долг на конец отчетного периода) по кредиту.

В-третьих, не следует сразу проводить все встречающие вычислительные операции, не стоит спешить с вычислениями, сделать акцент учащихся на то, что задача рассчитана на вычисления без калькулятора, и, если возникли действия, требующие очень больших вычислений, значит, что-то упущено.

В-четвертых, рассмотрев задачи на кредиты, встречаемые в ЕГЭ по математике профильного уровня, можно выделить 4 типа: 1) равные (аннуитетные) платежи, 2) разные (дифференцированные) платежи (долг, убывающий согласно данной таблице), 3) равномерно уменьшающиеся (дифференцированные) платежи; 4) равномерно уменьшающиеся (дифференцированные) платежи (задачи с дополнительным условием).

Тип 1. Равные (аннуитетные) платежи

Особенность этого типа заданий в том, что заемщик всегда вносит одинаковые суммы.

Тип 2. Разные (дифференцированные) платежи (долг, убывающий согласно данной таблице)

Особенность этого типа заданий в том, что каждый месяц/год оплачивается сумма долга согласно таблице.

Тип 3. Равномерно уменьшающиеся (дифференцированные) платежи

Особенность этого типа заданий в том, что заемщику следует уменьшать долг на одну и ту же величину. То есть за месяц/год пользования деньгами банк начислил на них процент, клиент теперь должен чуть больше. Своим платежом он оплатит банку проценты, чтобы заем стал таким, как до их начисления. А сверху внесет сумму, которая как раз и пойдет на то самое равномерное уменьшение долга.

Тип 4. Равномерно уменьшающиеся (дифференцированные) платежи (задачи с дополнительным условием)

Как правило, в таких задачах большое количество месяцев и для вычисления нужной величины стоит вспомнить об арифметической прогрессии.

Тип 5. Вклады

Банковский вклад — это сумма денег, переданная банку на хранение с целью получить доход в виде начисленных процентов. Раз в какой-то промежуток времени (месяц/год) банк начисляет на текущую сумму некоторое количество $r\%$. Раз в год после начисления процентов клиент, как правило, имеет право доложить на счет любую сумму денег. Также клиент имеет право снимать со счета любую сумму (естественно, не превышающую имеющуюся). Время, когда он может это сделать, указывается в задаче.

Данный тип задач один из самых простых для школьников из экономических задач. Поэтому обучать решению экономических задач следует начать именно с этого типа. При рассмотрении этой темы у учителя появляется хорошая возможность показать взаимосвязь уроков математики и повседневной жизни. Учащиеся выяснят, какие вклады выгоднее и на сколько и т.д. Перед тем, как переходить к изучению задач на вклады, следует повторить простые задачи на проценты и их решение. При решении задач на вклады следует обратить внимание учащегося на внимательное прочтение условия задачи. Особо обратить внимание на сумму, на которую будет начисляться процент.

Примеры решения экономических задач

Равные платежи

1. 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем Василий переводит в банк 3696300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Дано:	Решение:
S – сумма кредита $p = 11\% = \frac{11}{100}$ $n = 2$ года $c_1 = c_2 = 3696300 \text{ руб.} = x$ $S-?$	I. Строим модель 1) $S + \frac{11}{100}S = \frac{111}{100}S$ – долг перед 1-ым платежом $\frac{111}{100}S - x$ – долг после 1-го платежа 2) $\left(\frac{111}{100}S - x\right) + \frac{11}{100}\left(\frac{111}{100}S - x\right) =$ $= \frac{111}{100}\left(\frac{111}{100}S - x\right) =$

$= \left(\frac{111}{100}\right)^2 S - \frac{111}{100}x$ – долг перед 2-ым платежом

$\left(\frac{111}{100}\right)^2 S - \frac{111}{100}x - x = 0$ – долг после 2-го платежа

II. Вычисления

$$\left(\frac{111}{100}\right)^2 S - \frac{111}{100}x - x = 0 \Rightarrow \left(\frac{111}{100}\right)^2 S - \frac{211}{100}x = 0 \Rightarrow S = \frac{211x \cdot 100 \cdot 100}{100 \cdot 111 \cdot 111} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{211x \cdot 100}{111 \cdot 111} \Rightarrow S = \frac{211 \cdot 3696300 \cdot 100}{111 \cdot 111} = 6330000.$$

Таким образом, Василий взял в банке 6330000 рублей.

Ответ: 6330000 рублей.

2. В июле 2018 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами, и банку будет выплачено 311040 рублей?

Дано:	Решение:
S – сумма кредита $p = 20\% = \frac{1}{5}$ $n = 4$ года $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = x$ $c_1 + \cdots + c_4 = 311040$ руб.	I. Строим модель 1) $S + \frac{1}{5}S = \frac{6}{5}S$ – долг перед 1-ым платежом $\frac{6}{5}S - x$ – долг после 1-го платежа 2) $\left(\frac{6}{5}S - x\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}S - x\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{6}{5}S - x\right) =$
S–?	

$= \left(\frac{6}{5}\right)^2 S - \frac{6}{5}x$ – долг перед 2-ым платежом

$\left(\frac{6}{5}\right)^2 S - \frac{6}{5}x - x$ – долг после 2-го платежа

…

4) $\left(\frac{6}{5}\right)^4 S - \left(\frac{6}{5}\right)^3 x - \left(\frac{6}{5}\right)^2 x - \frac{6}{5}x$ – долг перед 4-ым платежом

$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S - \left(\frac{6}{5}\right)^3 x - \left(\frac{6}{5}\right)^2 x - \frac{6}{5}x - x = 0$ – долг после 4-го платежа

II. Вычисления

$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S - \left(\frac{6}{5}\right)^3 x - \left(\frac{6}{5}\right)^2 x - \frac{6}{5}x - x = 0 =>$

$=> \left(\frac{6}{5}\right)^4 S - x\left(\left(\frac{6}{5}\right)^3 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{6}{5} + 1\right) = 0$

$1, \frac{6}{5}, \left(\frac{6}{5}\right)^2, \left(\frac{6}{5}\right)^3$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{6}{5}$

$1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{6}{5}\right)^4 - 1\right)}{\frac{6}{5} - 1} = \frac{671 \cdot 5}{625 \cdot 1} = \frac{671}{125}$

Уравнение примет вид:

$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S - x \cdot \frac{671}{125} = 0 => S = \frac{671x \cdot 625}{125 \cdot 1296} = \frac{671x \cdot 5}{1296}$

$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = x$ и $c_1 + \cdots + c_4 = 311040$ руб. $=>$

$=> x = \frac{311040}{4} = 77760$

$S = \frac{671 \cdot 77760 \cdot 5}{1296} = 201300.$

Таким образом, необходимо взять в кредит 201300 рублей.

Ответ: 201300 рублей.

3. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нудно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 156060 рублей больше суммы взятого в кредит.

Дано:

S – сумма кредита

$p = 30\% = \frac{3}{10}$

$n = 3$ года

$c_1 = c_2 = c_3 = x$

$c_1 + \cdots + c_3 - S = 156060$ руб.

S–?

Решение:

I. Строим модель

1) $S \cdot \frac{13}{10}$ – долг перед 1-ым платежом

$S \cdot \frac{13}{10} - x$ – долг после 1-го платежа

2) $\left(S \cdot \frac{13}{10} - x\right)\frac{13}{10} = S\left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10}$ – долг перед 2-ым платежом

$S\left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10} - x$ – долг после 2-го платежа

3) $S\left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10}$ – долг перед 3-им платежом

$S\left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10} - x = 0$ – долг после 3-го платежа

II. Вычисления

$S\left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{13}{10} - x = 0 =>$

$=> S\left(\frac{13}{10}\right)^3 - x\left(\left(\frac{13}{10}\right)^2 + \frac{13}{10} + 1\right) = 0$

$1, \frac{13}{10}, \left(\frac{13}{10}\right)^2$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{13}{10}$

$1 + \frac{13}{10} + \left(\frac{13}{10}\right)^2 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{13}{10}\right)^3 - 1\right)}{\frac{13}{10} - 1} = \frac{1197 \cdot 10}{1000 \cdot 3} = \frac{399}{100}$

Уравнение примет вид:

$S\left(\frac{13}{10}\right)^3 - x \cdot \frac{399}{100} = 0 => S = \frac{399x \cdot 1000}{100 \cdot 2197} = \frac{399x \cdot 10}{2197}$

$c_1 = c_2 = c_3 = x$ и $c_1 + \dots + c_3 - S = 156060$ руб. $=>$

$=> 3x = 156060 + S$ и $S = \frac{133 \cdot 3x \cdot 10}{2197} => S = \frac{133 \cdot (156060 + S) \cdot 10}{2197} =>$

$=> \frac{1330 \cdot 156060 + 1330 \cdot S - 2197S}{2197} = 0 => 1330 \cdot 156060 - 867S = 0 =>$

$=> S = \frac{1330 \cdot 156060}{867} = 239400.$

Таким образом, взяли кредит на сумму 239400 рублей.

Ответ: 239400 рублей.

4. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 545000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 40% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года)?

Дано:

$S = 545000$ руб.

$p = 40\% = \frac{2}{5}$

$n = 3$ года

$c_1 = c_2 = c_3 = x$

$c_1 + \dots + c_3 - ?$

Решение:

I. Строим модель

1) $S \cdot \frac{7}{5}$ – долг перед 1-ым платежом

$S \cdot \frac{7}{5} - x$ – долг после 1-го платежа

2) $\left(S \cdot \frac{7}{5} - x\right)\frac{7}{5} = S\left(\frac{7}{5}\right)^2 - x \cdot \frac{7}{5}$ – долг перед 2-ым платежом

$S\left(\frac{7}{5}\right)^2 - x\cdot\frac{7}{5} - x$ – долг после 2-го платежа

3) $S\left(\frac{7}{5}\right)^3 - x\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^2 - x\cdot\frac{7}{5}$ – долг перед 3-им платежом

$S\left(\frac{7}{5}\right)^3 - x\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^2 - x\cdot\frac{7}{5} - x = 0$ – долг после 3-го платежа

II. Вычисления

$S\left(\frac{7}{5}\right)^3 - x\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^2 - x\cdot\frac{7}{5} - x = 0 =>$

$=> S\left(\frac{7}{5}\right)^3 - x\left(\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \frac{7}{5} + 1\right) = 0$

$1, \frac{7}{5}, \left(\frac{7}{5}\right)^2$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{7}{5}$

$$1 + \frac{7}{5} + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{1\cdot\left(\left(\frac{7}{5}\right)^3 - 1\right)}{\frac{7}{5} - 1} = \frac{218\cdot 5}{125\cdot 2} = \frac{109}{25}$$

Уравнение примет вид:

$S\left(\frac{7}{5}\right)^3 - x\cdot\frac{109}{25} = 0 => x = \frac{343S\cdot 25}{125\cdot 109} = \frac{343S}{5\cdot 109}$

$c_1 + \cdots + c_3 = 3x = \frac{3\cdot 343S}{5\cdot 109} => c_1 + \cdots + c_3 = \frac{3\cdot 343\cdot 545000}{5\cdot 109} = 1029000$

Таким образом, 1029000 рублей будет выплачено банку.

Ответ: 1029000 рублей.

5. Светлана Михайловна взяла кредит в банке на 4 года на сумму 4420000 рублей. Условия возврата кредита таковы: в конце каждого года банк увеличивает текущую сумму долга на 10%. Светлана Михайловна хочет выплатить весь долг двумя равными платежами – в конце второго и четвертого годов. При этом платежи в каждом случае выплачиваются после начисления процентов. Сколько рублей составит каждый из этих платежей?

Дано:	Решение:
$S = 4420000$ руб. $p = 10\% = \frac{1}{10}$ $n = 4$ года $c_1 = c_2 = x$	I. Строим модель 1) $S \cdot \frac{11}{10}$ – долг после 1-го начисления % 2) $\left(S \cdot \frac{11}{10}\right)\frac{11}{10} = S\left(\frac{11}{10}\right)^2$ – долг перед 1-ым платежом
$x-?$	

$S\left(\frac{11}{10}\right)^2 - x$ – долг после 1-го платежа

3) $\left(S\left(\frac{11}{10}\right)^2 - x\right)\frac{11}{10} = S\left(\frac{11}{10}\right)^3 - x \cdot \frac{11}{10}$ – долг после 3-го начисления %

4) $\left(S\left(\frac{11}{10}\right)^3 - x \cdot \frac{11}{10}\right)\frac{11}{10} = S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2$ – долг перед 2-ым платежом

$S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 - x = 0$ – долг после 2-го платежа

II. Вычисления

$S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^2 - x = 0 =>$

$=> S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x\left(\left(\frac{11}{10}\right)^2 + 1\right) = 0 =>$

$=> S\left(\frac{11}{10}\right)^4 - x \cdot \frac{221}{100} = 0 => x = \frac{14641S \cdot 100}{10000 \cdot 221} = \frac{14641S}{100 \cdot 221}$

$x = \frac{14641 \cdot 4420000}{100 \cdot 221} = 2928200$

Таким образом, 2928200 рублей составит каждый из платежей.

Ответ: 2928200 рублей.

6. 31 декабря 2016 года Василий взял в банке 5460000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплат кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Василий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x,

чтобы Василий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

Дано:	Решение:
$S = 5460000$ руб. $p = 20\% = \frac{1}{5}$ $n = 3$ года $c_1 = c_2 = c_3 = x$ $x-?$	I. Строим модель 1) $S \cdot \frac{6}{5}$ – долг перед 1-ым платежом $S \cdot \frac{6}{5} - x$ – долг после 1-го платежа 2) $\left(S \cdot \frac{6}{5} - x\right)\frac{6}{5} = S\left(\frac{6}{5}\right)^2 - x \cdot \frac{6}{5}$ – долг перед 2-ым платежом

$S\left(\frac{6}{5}\right)^2 - x \cdot \frac{6}{5} - x$ – долг после 2-го платежа

3) $S\left(\frac{6}{5}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 - x \cdot \frac{6}{5}$ – долг перед 3-им платежом

$S\left(\frac{6}{5}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 - x \cdot \frac{6}{5} - x = 0$ – долг после 3-го платежа

II. Вычисления

$$S\left(\frac{6}{5}\right)^3 - x \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 - x \cdot \frac{6}{5} - x = 0 =>$$
$$=> S\left(\frac{11}{10}\right)^3 - x\left(\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{6}{5} + 1\right) = 0$$

$1, \frac{6}{5}, \left(\frac{6}{5}\right)^2$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{6}{5}$

$$1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{6}{5}\right)^3 - 1\right)}{\frac{6}{5} - 1} = \frac{91 \cdot 5}{125 \cdot 1} = \frac{91}{25}$$

Уравнение примет вид:

$$S\left(\frac{6}{5}\right)^3 - x \cdot \frac{91}{25} = 0 => x = \frac{216S \cdot 25}{125 \cdot 91} = \frac{216S}{5 \cdot 91}$$
$$x = \frac{216 \cdot 5460000}{5 \cdot 91} = 2592000$$

Таким образом, каждый из платежей составит 2592000 рублей.

Ответ: 2592000 рублей.

7. Анна хочет взять в кредит 6902000 рублей под 12,5% годовых. Выплаты по кредиту нужно проводить раз в год равными суммами после начисления процентов. Какой должна быть сумма каждой

выплаты, чтобы Анна выплатила долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Дано:
$S = 6902000$ руб.
$p = 12{,}5\% = \frac{1}{8}$
$n = 4$ года
$c_1 = \dots = c_4 = x$

x–?

Решение:
Пусть кредит взяли в январе, начисление процентов происходит в феврале, а выплачивается часть долга в апреле

I. Строим модель

	Дата	Долг
1	январь	S
	февраль	$\frac{9}{8}S$
	апрель	$\frac{9}{8}S - x$
2	февраль	$\left(\frac{9}{8}\right)^2 S - \frac{9}{8}x$
	апрель	$\left(\frac{9}{8}\right)^2 S - \frac{9}{8}x - x$
	…	
4	февраль	$\left(\frac{9}{8}\right)^4 S - \left(\frac{9}{8}\right)^3 x - \left(\frac{9}{8}\right)^2 x - \frac{9}{8}x$
	апрель	$\left(\frac{9}{8}\right)^4 S - \left(\frac{9}{8}\right)^3 x - \left(\frac{9}{8}\right)^2 x - \frac{9}{8}x - x = 0$

II. Вычисления

$$\left(\frac{9}{8}\right)^4 S - \left(\frac{9}{8}\right)^3 x - \left(\frac{9}{8}\right)^2 x - \frac{9}{8}x - x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S\left(\frac{9}{8}\right)^4 - x\left(\left(\frac{9}{8}\right)^3 + \left(\frac{9}{8}\right)^2 + \frac{9}{8} + 1\right) = 0$$

$1, \frac{9}{8}, \left(\frac{9}{8}\right)^2, \left(\frac{9}{8}\right)^3$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{9}{8}$

$$1 + \frac{9}{8} + \left(\frac{9}{8}\right)^2 + \left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{1\cdot\left(\left(\frac{9}{8}\right)^4 - 1\right)}{\frac{9}{8} - 1} = \frac{2465\cdot 8}{4096\cdot 1} = \frac{2465}{512}$$

Уравнение примет вид:

$$S\left(\frac{9}{8}\right)^4 - x\cdot\frac{2465}{512} = 0 \Rightarrow x = \frac{6561S\cdot 512}{4096\cdot 2465} = \frac{6561S}{8\cdot 2465}$$

$x = \frac{6561 \cdot 6902000}{8 \cdot 2465} = 2296350$

Таким образом, каждый из платежей составит 2296350 рублей.

Ответ: 2296350 рублей.

8. В июле планируется взять кредит на сумму 1342000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Дано:

$S = 1342000$ руб.

$p = 20\% = \frac{1}{5}$

$n_1 = 4$ года

$n_2 = 2$ года

$x_1 = \cdots = x_4 = x$ – платежи

$y_1 = y_2 = y$ – платежи

$(4x - 2y)$–?

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель для $n_1 = 4$

	Дата	Долг
1	июль	S
	январь	$\frac{6}{5}S$
	март	$\frac{6}{5}S - x$
2	январь	$\left(\frac{6}{5}\right)^2 S - \frac{6}{5}x$
	март	$\left(\frac{6}{5}\right)^2 S - \frac{6}{5}x - x$
	…	
4	январь	$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S - \left(\frac{6}{5}\right)^3 x -$ $-\left(\frac{6}{5}\right)^2 x - \frac{6}{5}x$
	март	$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S - \left(\frac{6}{5}\right)^3 x -$ $-\left(\frac{6}{5}\right)^2 x - \frac{6}{5}x - x = 0$

Строим модель для $n_2 = 2$

	Дата	Долг
1	июль	S
	январь	$\frac{6}{5}S$
	март	$\frac{6}{5}S - y$
2	январь	$\left(\frac{6}{5}\right)^2 S - \frac{6}{5}y$
	март	$\left(\frac{6}{5}\right)^2 S - \frac{6}{5}y - y = 0$

II. Вычисления

Найдем x:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S - \left(\frac{6}{5}\right)^3 x - \left(\frac{6}{5}\right)^2 x - \frac{6}{5}x - x = 0 =>$$

$$=> S\left(\frac{6}{5}\right)^4 - x\left(\left(\frac{6}{5}\right)^3 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \frac{6}{5} + 1\right) = 0$$

$1, \frac{6}{5}, \left(\frac{6}{5}\right)^2, \left(\frac{6}{5}\right)^3$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{6}{5}$

$$1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{1\cdot\left(\left(\frac{6}{5}\right)^4 - 1\right)}{\frac{6}{5} - 1} = \frac{671\cdot 5}{625\cdot 1} = \frac{671}{125}$$

Уравнение примет вид:

$$S\left(\frac{6}{5}\right)^4 - x\cdot\frac{671}{125} = 0 => x = \frac{1296S\cdot 125}{625\cdot 671} = \frac{1296S}{5\cdot 671}$$

$$x = \frac{1296\cdot 1342000}{5\cdot 671} = 518400$$

Найдем y:

$$\left(\frac{6}{5}\right)^2 S - \frac{6}{5}y - y = 0 => \left(\frac{6}{5}\right)^2 S - y\cdot\frac{11}{5} = 0 => y = \frac{36S\cdot 5}{25\cdot 11} = \frac{36S}{5\cdot 11}$$

$$y = \frac{36\cdot 1342000}{5\cdot 11} = 878400$$

$$4x - 2y = 4\cdot 518000 - 2\cdot 878400 =$$

$$= 2072000 - 1756800 = 315200$$

Таким образом, придется отдать больше на 315200 рублей.

Ответ: 315200 рублей.

9. 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587250 рублей, то за 2 года. Найдите a.

Дано:

$S-?$ руб.

$p = a\% = \frac{a}{100}$

$n_1 = 4$ года

$n_2 = 2$ года

$x_1 = \cdots = x_4 = x =$
$= 328050$ руб.

$y_1 = y_2 = y =$
$= 587250$ руб.

$a-?$

Решение:

Обозначим $1 + \frac{a}{100} = k$

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель для $n_1 = 4$

	Дата	Долг
0	декабрь	S
1	декабрь	Sk
	март	$Sk - x$
2	декабрь	$k^2S - kx$
	март	$k^2S - kx - x$
	…	
4	декабрь	$k^4S - k^3x - k^2x - kx$
	март	$k^4S - k^3x - k^2x -$ $-kx - x = 0$

Строим модель для $n_2 = 2$

	Дата	Долг
0	декабрь	S
1	декабрь	Sk
	март	$Sk - y$
2	декабрь	$k^2S - ky$
	март	$k^2S - ky - y = 0$

II. Вычисления

$k^4S - k^3x - k^2x - kx - x = 0 => S = \frac{k^3x+k^2x+kx+x}{k^4} =$
$= \frac{x(k^3+k^2+k+1)}{k^4}$

$1, k, k^2, k^3$ – геометрическая прогрессия, $q = k$

$1 + k + k^2 + k^3 = \frac{1\cdot(k^4-1)}{k-1} = \frac{k^4-1}{k-1}$

Уравнение примет вид:

$S = \frac{x(k^4-1)}{k^4(k-1)}$

$k^2S - ky - y = 0 => S = \frac{y(k+1)}{k^2}$

$$\frac{x(k^4-1)}{k^4(k-1)} = \frac{y(k+1)}{k^2} => \frac{x(k^2+1)(k+1)(k-1)}{k^4(k-1)} = \frac{y(k+1)}{k^2} =>$$

$=> x(k^2+1) = yk^2 => (x-y)k^2 + x = 0 => k^2 = \frac{x}{y-x}$

$k^2 = \frac{328050}{587250-328050} = \frac{328050}{259200} = \frac{81}{64} => k = \frac{9}{8}$ (корень $-\frac{9}{8}$ не удовлетворяет условию задачи).

$1 + \frac{a}{100} = \frac{9}{8} => \frac{a}{100} = \frac{1}{8} => a = \frac{100}{8} = 12{,}5.$

Таким образом, долг увеличивается каждый год на 12,5%.

Ответ: $a = 12{,}5$.

10. Иван хочет взять в кредит 1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Процентная ставка 10% годовых. На какое минимальное количество лет Иван может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты не превышали 250 тысяч рублей?

Дано:

$S = 1$ млн руб.

$p = 10\% = \frac{1}{10}$

$c_1 = \dots = c_n = x$

$x \leq 0{,}25$ млн руб.

$n_{min} - ?$

Решение:

I. Строим модель

1) $S \cdot \frac{11}{10}$ – долг перед 1-ым платежом

$S \cdot \frac{11}{10} - x$ – долг после 1-го платежа

2) $\left(S \cdot \frac{11}{10} - x\right)\frac{11}{10} = S\left(\frac{11}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{11}{10}$ – долг перед 2-ым платежом

$S\left(\frac{11}{10}\right)^2 - x \cdot \frac{11}{10} - x$ – долг после 2-го платежа

…

n) $S\left(\frac{11}{10}\right)^n - x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} - \dots - x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^2 - x\cdot\frac{11}{10}$ – долг перед -ым платежом

$S\left(\frac{11}{10}\right)^n - x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} - \dots - x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^2 - x\cdot\frac{11}{10} - x = 0$ – долг после -го платежа

II. Вычисления

$$S\left(\frac{11}{10}\right)^n - x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} - \dots - x\cdot\left(\frac{11}{10}\right)^2 - x\cdot\frac{11}{10} - x = 0 =>$$

$$=> S\left(\frac{11}{10}\right)^n - x\left(\left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \frac{11}{10} + 1\right) = 0$$

$1, \frac{11}{10}, \left(\frac{11}{10}\right)^2, \dots, \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1}$ – геометрическая прогрессия, $q = \frac{11}{10}$

$$1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{11}{10}\right)^{n-1} = \frac{1\cdot\left(\left(\frac{11}{10}\right)^n - 1\right)}{\frac{11}{10} - 1} = \frac{(11^n - 10^n)\cdot 10}{10^n\cdot 1} = \frac{11^n - 10^n}{10^{n-1}}$$

Уравнение примет вид:

$$S\left(\frac{11}{10}\right)^n - x\cdot\frac{11^n - 10^n}{10^{n-1}} = 0 => x = \frac{11^n S\cdot 10^{n-1}}{10^n\cdot(11^n - 10^n)} = \frac{11^n S}{10\cdot(11^n - 10^n)}$$

$$x = \frac{11^n}{10\cdot(11^n - 10^n)}, x \le \frac{1}{4} => \frac{11^n}{10\cdot(11^n - 10^n)} \le \frac{1}{4} => \frac{11^n}{11^n - 10^n} \le \frac{10}{4} =>$$

$$=> \frac{11^n}{11^n - 10^n} \le 2{,}5$$

$n = 1, \frac{11}{1} \le 2{,}5$ – неверно;

…

$n = 5, \frac{161051}{61051} \le 2{,}5$ – неверно;

$n = 6, \frac{1771561}{771561} \le 2{,}5$ – верно.

Таким образом, Иван может взять кредит на 6 лет.

Ответ: 6 лет.

Разные платежи

1. В июле 2017 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 2 млн рублей.

Дано:
$S-?$ млн руб.$, S \in \mathbb{Z}$
$p = 25\% = \frac{1}{4}$
$n = 3$ года
c_1, c_2, c_3 – платежи
$c_{max} - c_{min} < 2$ млн руб.

$S_{min}-?$

Решение:
Пусть платежи выплачиваются в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1{,}25S$	
	март	$1{,}25S - c_1 = 0{,}7S$	$0{,}55S$
2	июль	$0{,}7S$	
	январь	$1{,}25 \cdot 0{,}7S = 0{,}875S$	
	март	$0{,}875S - c_2 = 0{,}4S$	$0{,}475S$
3	июль	$0{,}4S$	
	январь	$1{,}25 \cdot 0{,}4S = 0{,}5S$	
	март	$0{,}5S - c_3 = 0$	$0{,}5S$

Из таблицы видно, что $c_{max} = 0{,}55S$, $c_{min} = 0{,}475S \Rightarrow 0{,}55S - 0{,}475S < 2$

II. Вычисления

$0,55S - 0,475S < 2 => 0,075S < 2 => S < 26\frac{2}{3}$

Таким образом, при условии, что $S \in \mathbb{Z}, S_{min} = 26$ млн руб.

Ответ: 26.

2. В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,3S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн. руб.

Дано:

$S-?$ млн руб.$, S \in \mathbb{Z}$

$p = 30\% = \frac{3}{10}$

$n = 3$ года

$c_1, c_2, c_3 > 3$ млн руб.

$S_{min}-?$

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1,3S$	
	март	$1,3S - c_1 = 0,7S$	$0,6S$
2	июль	$0,7S$	
	январь	$1,3 \cdot 0,7S = 0,91S$	
	март	$0,91S - c_2 = 0,3S$	$0,61S$
3	июль	$0,3S$	

	январь	$1{,}3 \cdot 0{,}3S = 0{,}39S$	
	март	$0{,}39S - c_3 = 0$	$0{,}39S$

Т.к. каждая из выплат должна быть больше 3 млн руб., то составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}6S > 3 \\ 0{,}61S > 3 \\ 0{,}39S > 3 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 0{,}6S > 3 \\ 0{,}61S > 3 \\ 0{,}39S > 3 \end{cases} => \begin{cases} S > 5 \\ S > 4\frac{56}{61} \\ S > 7\frac{9}{13} \end{cases} => S > 7\frac{9}{13}$$

Таким образом, при условии, что $S \in \mathbb{Z}, S_{min} = 8$ млн руб.

Ответ: 8.

3. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

Дано:
S–? млн руб., $S \in \mathbb{Z}$
$p = 15\% = \frac{3}{20}$
$n = 4$ года
$c_1 + \dots + c_4 < 50$ млн руб.

S_{max}–?

Решение:
Пусть платежи выплачиваются в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1{,}15S$	
	март	$1{,}15S - c_1 = 0{,}8S$	$0{,}35S$
2	июль	$0{,}8S$	
	январь	$1{,}15 \cdot 0{,}8S = 0{,}92S$	
	март	$0{,}92S - c_2 = 0{,}5S$	$0{,}42S$
3	июль	$0{,}5S$	
	январь	$1{,}15 \cdot 0{,}5S = 0{,}575S$	
	март	$0{,}575S - c_3 = 0{,}1S$	$0{,}475S$
4	июль	$0{,}1S$	
	январь	$1{,}15 \cdot 0{,}1S = 0{,}115S$	
	март	$0{,}115S - c_4 = 0$	$0{,}115S$

Т.к. сумма выплат должна быть меньше 50 млн руб., то составим неравенство:

$$0{,}35S + 0{,}42S + 0{,}475S + 0{,}115S < 50$$

II. Вычисления

$0{,}35S + 0{,}42S + 0{,}475S + 0{,}115S < 50 \Rightarrow 1{,}36S < 50 \Rightarrow$
$\Rightarrow S < 36\frac{13}{17}$

Таким образом, при условии, что $S \in \mathbb{Z}, S_{max} = 36$ млн руб.
Ответ: 36.

4. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S – натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.

Дано:
$S-?$ тыс. руб., $S \in \mathbb{N}$
$p = 15\% = \frac{3}{20}$
$n = 3$ года
$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}$ тыс. руб.

$S_{min}-?$

Решение:
Пусть платежи выплачиваются в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1{,}15S$	
	март	$1{,}15S - c_1 = 0{,}7S$	$0{,}45S$
2	июль	$0{,}7S$	
	январь	$1{,}15 \cdot 0{,}7S = 0{,}805S$	
	март	$0{,}805S - c_2 = 0{,}4S$	$0{,}405S$
3	июль	$0{,}4S$	
	январь	$1{,}15 \cdot 0{,}4S = 0{,}46S$	
	март	$0{,}46S - c_3 = 0$	$0{,}46S$

II. Вычисления
$c_1 = 0{,}45S = \frac{9}{20}S$; $c_2 = 0{,}405S = \frac{81}{200}S$; $c_3 = 0{,}46S = \frac{23}{50}S$

Т.к. $S \in \mathbb{N}$, каждая выплата – целое число тыс. руб., то
$S \vdots 20;\ S \vdots 200; S \vdots 50$, то наименьшее возможное $S = 200$ тыс. руб.
Ответ: 200.

5. В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите S, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 327 тысяч рублей.

Дано:
$S-?$ тыс. руб.
$p = 2\% = \frac{1}{50}$
$n = 6$ лет
$c_1 + \dots + c_6 =$ 327 тыс. руб.

$S-?$

Решение:
Пусть платежи выплачиваются в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	июль	S	
	январь	$1{,}02S$	
	март	$1{,}02S - c_1 = 0{,}9S$	$0{,}120S$
2	июль	$0{,}9S$	
	январь	$1{,}02 \cdot 0{,}9S = 0{,}918S$	
	март	$0{,}918S - c_2 = 0{,}8S$	$0{,}118S$
3	июль	$0{,}8S$	
	январь	$1{,}02 \cdot 0{,}8S = 0{,}816S$	

	март	$0{,}816S - c_3 = 0{,}7S$	$0{,}116S$
	…		
6	июль	$0{,}5S$	
	январь	$1{,}02 \cdot 0{,}5S = 0{,}51S$	
	март	$0{,}51S - c_4 = 0$	$0{,}51S$

Т.к. сумма выплат должна быть меньше 327 тыс. руб., то составим уравнение:

$$0{,}12S + 0{,}118S + 0{,}116S + 0{,}114S + 0{,}112S + 0{,}51S = 327$$

II. Вычисления

$0{,}12S + 0{,}118S + 0{,}116S + 0{,}114S + 0{,}112S + 0{,}51S = 327 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}09S = 327 \Rightarrow S = 300$

Таким образом, $S = 300$ тыс. руб.

Ответ: 300.

6. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 8 млн рублей.

Дано:

$S-?$ млн руб.$, S \in \mathbb{Z}$

$p = 20\% = \frac{1}{5}$

$n = 4$ года

$c_1 + \dots + c_4 > 8$ млн руб.

$c_3 = c_4 = x$

$S_{min} - ?$

Решение:

Пусть кредит выдан в январе, долг возрастает в июле, а платежи выплачиваются в ноябре

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
1	январь	S	
	июль	$1{,}2S$	

	ноябрь	$1{,}2S - c_1 = S$	$0{,}2S$
2	январь	S	
	июль	$1{,}2S$	
	ноябрь	$1{,}2S - c_2 = S$	$0{,}2S$
3	январь	S	
	июль	$1{,}2S$	
	ноябрь	$1{,}2S - x$	x
4	январь	$1{,}2S - x$	
	июль	$1{,}2(1{,}2S - x)$	
	ноябрь	$1{,}2(1{,}2S - x)$ $- x = 0$	x

Т.к. сумма выплат должна быть больше 8 млн руб., то составим систему:

$$\begin{cases} 1{,}2(1{,}2S - x) - x = 0 \\ 0{,}2S + 0{,}2S + x + x > 8 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 1{,}2(1{,}2S - x) - x = 0 \\ 0{,}2S + 0{,}2S + x + x > 8 \end{cases} => \begin{cases} 1{,}44S - 2{,}2x = 0 \\ 0{,}4S + 2x > 8 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} 1{,}44S - 2{,}2x = 0 \\ 0{,}4S + 2x > 8 \end{cases} => \begin{cases} 0{,}72S - 1{,}1x = 0 \\ 0{,}2S + 1x > 4 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} 36S - 55x = 0 \\ S + 5x > 20 \end{cases} => \begin{cases} x = \frac{36}{55}S \\ S + 5x > 20 \end{cases} => S + 5 \cdot \frac{36}{55}S > 20 =>$$

$$=> S + \frac{36}{11}S > 20 => \frac{47}{11}S > 20 => S > \frac{220}{47} => S > 4\frac{32}{47}$$

Таким образом, при условии, что $S \in \mathbb{Z}, S_{min} = 5$ млн руб.

Ответ: 5.

7. В мае 2017 года был взять кредит в банке на шесть лет в размере S млн рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый декабрь каждого года долг возрастает на 10%;
- с января по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в мае 2018, 2019 и 2020 годов долг остается равным S млн рублей;
- выплаты в 2021, 2022 и 2023 годах равны между собой;

- к маю 2023 года долг будет выплачен полностью.

Найдите наибольшее целое S, при котором общая сумма выплат не превысит 13 млн рублей.

Дано:

$S-?$ млн руб.$, S \in \mathbb{Z}$

$p = 10\% = \frac{1}{10}$

$n = 6$ лет

$c_1 + \cdots + c_6 \leq 13$ млн руб.

$c_4 = c_5 = c_6 = x$

$S_{max}-?$

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
2017	май	S	
	декабрь	$1{,}1S$	
2018	март	$1{,}1S - c_1 = S$	$0{,}1S$
	май	S	
	декабрь	$1{,}1S$	
2019	март	$1{,}1S - c_2 = S$	$0{,}1S$
	май	S	
	декабрь	$1{,}1S$	
2020	март	$1{,}1S - c_3 = S$	$0{,}1S$
	май	S	
	декабрь	$1{,}1S$	
2021	март	$1{,}1S - x$	x
	май	$1{,}1S - x$	
	декабрь	$1{,}1^2S - 1{,}1x$	
2022	март	$1{,}1^2S - 1{,}1x - x$	x
	май	$1{,}1^2S - 1{,}1x - x$	
	декабрь	$1{,}1^3S - 1{,}1^2x - 1{,}1x$	
2023	март	$1{,}1^3S - 1{,}1^2x - 1{,}1x - x = 0$	x

Т.к. сумма выплат должна быть меньше 13 млн руб., то составим систему:

$$\begin{cases} 1{,}1^3S - 1{,}1^2x - 1{,}1x - x = 0 \\ 0{,}1S + 0{,}1S + 0{,}1S + x + x + x \leq 13 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 1{,}1^3S - 1{,}1^2x - 1{,}1x - x = 0 \\ 0{,}1S + 0{,}1S + 0{,}1S + x + x + x \le 13 \end{cases} =>$$
$$=> \begin{cases} 1{,}1^3S - x(1{,}1^2 + 1{,}1 + 1) = 0 \\ 0{,}3S + 3x \le 13 \end{cases} =>$$
$$=> \begin{cases} 1{,}1^3S - x \cdot \frac{1\cdot(1{,}1^3-1)}{1{,}1-1} = 0 \\ 3S + 30x \le 130 \end{cases} => \begin{cases} \frac{1331}{1000}S - x \cdot \frac{331}{100} = 0 \\ 3S + 30x \le 130 \end{cases} =>$$
$$=> \begin{cases} x = \frac{1331S}{3310} \\ 3S + 30x \le 130 \end{cases} => 3S + 30 \cdot \frac{1331S}{3310} \le 130 =>$$
$$=> 3S + \frac{3993S}{331} \le 130 => \frac{4986}{331}S \le 130 => S \le 8\frac{1571}{2493}$$

Таким образом, при условии, что $S \in \mathbb{Z}, S_{max} = 8$ млн руб.

Ответ: 8.

8. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 долг остается равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
- к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

Дано:

$S-?$ тыс. руб.

$p = 20\% = \frac{1}{5}$

$n = 5$ лет

$c_4 = c_5 = x = 360$ тыс. руб.

$c_1 + \dots + c_5 - ?$

Решение:

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
2016	июль	S	
2017	январь	$1{,}2S$	
	март	$1{,}2S - c_1 = S$	$0{,}2S$
	июль	S	
2018	январь	$1{,}2S$	
	март	$1{,}2S - c_2 = S$	$0{,}2S$
	июль	S	

2019	январь	$1{,}2S$	
	март	$1{,}2S - c_3 = S$	$0{,}2S$
	июль	S	
2020	январь	$1{,}2S$	
	март	$1{,}2S - x$	x
	июль	$1{,}2S - x$	
2021	январь	$1{,}2^2S - 1{,}2x$	
	март	$1{,}2^2S - 1{,}2x - x = 0$	x
	июль	0	

II. Вычисления

$1{,}2^2S - 1{,}2x - x = 0 => 1{,}2^2S - 2{,}2x = 0 =>$

$=> S = \frac{2{,}2x}{1{,}44} = \frac{1{,}1x}{0{,}72} = \frac{55x}{36}$

$c_1 + \cdots + c_5 = 0{,}2S + 0{,}2S + 0{,}2S + x + x = 0{,}6S + 2x =$
$0{,}6 \cdot \frac{55x}{36} + 2x = \frac{11x}{12} + 2x = \frac{35x}{12}$

$c_1 + \cdots + c_5 = \frac{35 \cdot 360}{12} = 1050$

Таким образом, общая сумма выплат составит 1050 тыс. руб. или 1050000 руб.

Ответ: 1050000.

9. Дмитрий взял кредит в банке на сумму 270200 рублей. Схема выплаты кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Дмитрий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Дмитрий погасил кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Дмитрий заплатил в первый раз? Ответ дайте в рублях.

Дано:	Решение:
$S = 270200$ руб. $p = 10\% = \frac{1}{10}$ $n = 3$ года $c_1 = x$ $c_2 = 3c_1 = 3x$ $c_3 = 3c_2 = 9x$ $c_1 -?$	Пусть кредит взят в январь, в декабре долг увеличивается, платежи выплачиваются в марте I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	январь	S	
1	декабрь	$1{,}1S$	
	март	$1{,}1S - x$	x
2	декабрь	$1{,}1^2S - 1{,}1x$	
	март	$1{,}1^2S - 1{,}1x - 3x$	$3x$
3	декабрь	$1{,}1^3S - 1{,}1^2x - 3{,}3x$	
	март	$1{,}1^3S - 1{,}1^2x - 3{,}3x - 9x = 0$	$9x$

II. Вычисления

$1{,}1^3S - 1{,}1^2x - 3{,}3x - 9x = 0 =>$

$=> 1{,}1^3S - x(1{,}21 + 3{,}3 + 9) = 0 =>$

$=> x = \frac{1{,}331S}{13{,}51} = \frac{1331S}{13510} => x = \frac{1331 \cdot 270200}{13510} = 26620$

Таким образом, Дмитрий заплатил в первый раз 26620 руб.

Ответ: 26620.

10. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 160000 рублей, а во второй год – 240000 рублей.

Дано:
$S - 300000$ руб.
$p = r\% = \frac{r}{100}$
$n = 2$ года
$c_1 = 160000$ руб.
$c_2 = 240000$ руб.

$r-?$

Решение:
Обозначим $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$
Пусть платежи выплачиваются в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг
0	июль	S
1	январь	Sk
	март	$Sk - c_1$
2	январь	$k^2S - kc_1$
	март	$k^2S - kc_1 - c_2 = 0$

II. Вычисления
$k^2S - kc_1 - c_2 = 0 =>$
$=> k^2 \cdot 300000 - k \cdot 160000 - 240000 = 0 =>$
$=> k^2 \cdot 15 - k \cdot 8 - 12 = 0 => \left[\begin{array}{c} k_1 = \frac{6}{5} \\ k_2 = -\frac{2}{3} - \text{не удовл. усл. } (*) \end{array}\right.$
$1 + \frac{r}{100} = \frac{6}{5} => \frac{r}{100} = \frac{1}{5} => r = \frac{100}{5} = 20.$
Таким образом, долг увеличивается каждый год на 20%.
Ответ: $r = 20.$

11. 15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн рублей.

Дано:
$S = 1$ млн руб.
$p = r\% = \frac{r}{100}, r \in \mathbb{Z}$
$n = 6$ месяцев
$c_1 + \cdots + c_6 < 1{,}2$ млн руб.

r_{max}—?

Решение:
Обозначим $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \ldots (*)$
Пусть платежи выплачиваются 7 числа
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	1	
1	01.02	$k \cdot 1$	
	07.02	$k \cdot 1 - c_1 = 0{,}6$	$k - 0{,}6$
	15.02	$0{,}6$	
2	01.03	$0{,}6k$	
	07.03	$0{,}6k - c_2 = 0{,}4$	$0{,}6k - 0{,}4$
	15.03	$0{,}4$	
3	01.04	$0{,}4k$	
	07.04	$0{,}4k - c_3 = 0{,}3$	$0{,}4k - 0{,}3$
	15.04	$0{,}3$	
4	01.05	$0{,}3k$	
	07.05	$0{,}3k - c_4 = 0{,}2$	$0{,}3k - 0{,}2$
	15.05	$0{,}2$	
5	01.06	$0{,}2k$	
	07.06	$0{,}2k - c_5 = 0{,}1$	$0{,}2k - 0{,}1$
	15.06	$0{,}1$	
6	01.07	$0{,}1k$	
	07.07	$0{,}1k - c_6 = 0$	$0{,}1k$
	15.07	0	

Т.к. сумма выплат должна быть меньше 1,2 млн руб., то составим неравенство:

$$(k - 0{,}6) + (0{,}6k - 0{,}4) + (0{,}4k - 0{,}3) + (0{,}3k - 0{,}2) +$$
$$+(0{,}2k - 0{,}1) + 0{,}1k < 1{,}2$$

II. Вычисления

$$(k - 0{,}6) + (0{,}6k - 0{,}4) + (0{,}4k - 0{,}3) + (0{,}3k - 0{,}2) +$$
$$+(0{,}2k - 0{,}1) + 0{,}1k < 1{,}2 => 2{,}6k - 1{,}6 < 1{,}2 =>$$
$$=> 2{,}6k < 2{,}8 => k < \frac{14}{13} => k < 1\frac{1}{13} => 1 + \frac{r}{100} < 1\frac{1}{13} =>$$

$\Rightarrow \frac{r}{100} < \frac{1}{13} \Rightarrow r < \frac{100}{13} \Rightarrow r < 7\frac{9}{13}$

Таким образом, при условии, что $r \in \mathbb{Z}, r_{max} = 7$

Ответ: 7.

12. 15 января Антон взял в кредит 3 миллиона рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастет на $r\%$ по сравнению с предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го февраля, апреля и июня долг должен быть на одну девятую часть от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца;
- 15-го марта, мая и июля долг должен быть на две девятых части от исходной суммы долга меньше, чем величина долга 15 числа предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 220 тысяч рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Дано:

$S = 3$ млн руб.

$p = r\% = \frac{r}{100}$

$n = 6$ месяцев

$c_1 + \cdots + c_6 - S = 0{,}22$ млн руб.

r–?

Решение:

Обозначим $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \ldots (*)$

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$k \cdot S$	
	07.02	$k \cdot S - c_1 = S - \frac{1}{9}S$	$\left(k - \frac{8}{9}\right)S$
	15.02	$\frac{8}{9}S$	
2	01.03	$\frac{8}{9}Sk$	

	07.03	$\frac{8}{9}Sk - c_2$ $= \frac{8}{9}S - \frac{2}{9}S$	$\left(\frac{8}{9}k - \frac{2}{3}\right)S$
	15.03	$\frac{2}{3}S$	
3	01.04	$\frac{2}{3}Sk$	
	07.04	$\frac{2}{3}Sk - c_3$ $= \frac{1}{3}S - \frac{1}{9}S$	$\left(\frac{2}{3}k - \frac{5}{9}\right)S$
	15.04	$\frac{5}{9}S$	
4	01.05	$\frac{5}{9}Sk$	
	07.05	$\frac{5}{9}Sk - c_4$ $= \frac{5}{9}S - \frac{2}{9}S$	$\left(\frac{5}{9}k - \frac{1}{3}\right)S$
	15.05	$\frac{1}{3}S$	
5	01.06	$\frac{1}{3}Sk$	
	07.06	$\frac{1}{3}Sk - c_5$ $= \frac{1}{3}S - \frac{1}{9}S$	$\left(\frac{1}{3}k - \frac{2}{9}\right)S$
	15.06	$\frac{2}{9}S$	
6	01.07	$\frac{2}{9}Sk$	
	07.07	$\frac{2}{9}Sk - c_6$ $= \frac{2}{9}S - \frac{2}{9}S = 0$	$\frac{2}{9}Sk$
	15.07	0	

Т.к. общая сумма выплат после полного погашения кредита на 220 тысяч рублей больше суммы, взятой в кредит, то составим уравнение:

$$\left(k-\frac{8}{9}\right)S+\left(\frac{8}{9}k-\frac{2}{3}\right)S+\left(\frac{2}{3}k-\frac{5}{9}\right)S+\left(\frac{5}{9}k-\frac{1}{3}\right)S+\left(\frac{1}{3}k-\frac{2}{9}\right)S+$$
$$+\frac{2}{9}Sk-S=\frac{22}{100}$$

II. Вычисления

$$\left(k-\frac{8}{9}\right)S+\left(\frac{8}{9}k-\frac{2}{3}\right)S+\left(\frac{2}{3}k-\frac{5}{9}\right)S+\left(\frac{5}{9}k-\frac{1}{3}\right)S+\left(\frac{1}{3}k-\frac{2}{9}\right)S+$$
$$+\frac{2}{9}Sk-S=\frac{22}{100}=>$$
$$=>S\left(k-\frac{8}{9}+\frac{8}{9}k-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k-\frac{5}{9}+\frac{5}{9}k-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}k-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}k-1\right)=$$
$$=\frac{22}{100}=>S\left(\frac{11}{3}k-\frac{11}{3}\right)=\frac{22}{100}=>3\left(\frac{11}{3}k-\frac{11}{3}\right)=\frac{22}{100}=>$$
$$=>11(k-1)=\frac{22}{100}=>k-1=\frac{2}{100}=>k=\frac{102}{100}=>$$
$$=>1+\frac{r}{100}=\frac{102}{100}=>\frac{r}{100}=\frac{2}{100}=>r=2$$

Таким образом, каждый месяц долг возрастает на 2%.

Ответ: 2.

13. В декабре 2018 г. планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере 2 млн руб. Условия его возврата таковы:

- в январе каждого года долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего года, где r – целое число;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- 1 июля каждого года долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	01.07.2019	01.07.2020	01.07.2021	01.07.2022	01.07.2023	01.07.2024
Долг (в млн рублей)	1,8	1,6	1,3	0,9	0,5	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 2,65 млн руб.

Дано:
$S = 2$ млн руб.
$p = r\% = \frac{r}{100}, r \in \mathbb{Z}$
$n = 6$ лет
$c_1 + \dots + c_6 < 2{,}65$ млн руб.

r_{max} – ?

Решение:
Обозначим $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*)$
Пусть платежи выплачиваются в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
2018	декабрь	2	
2019	январь	$k \cdot 2$	
	март	$k \cdot 2 - c_1 = 1{,}8$	$2k - 1{,}8$
	июль	$1{,}8$	
2020	январь	$1{,}8k$	
	март	$1{,}8k - c_2 = 1{,}6$	$1{,}8k - 1{,}6$
	июль	$1{,}6$	
2021	январь	$1{,}6k$	
	март	$1{,}6k - c_3 = 1{,}3$	$1{,}6k - 1{,}3$
	июль	$1{,}3$	
2022	январь	$1{,}3k$	
	март	$1{,}3k - c_4 = 0{,}9$	$1{,}3k - 0{,}9$
	июль	$0{,}9$	
2023	январь	$0{,}9k$	
	март	$0{,}9k - c_5 = 0{,}5$	$0{,}9k - 0{,}5$
	июль	$0{,}5$	
2024	январь	$0{,}5k$	
	март	$0{,}5k - c_6 = 0$	$0{,}5k$
	июль	0	

Т.к. общая сумма выплат должна быть менее 2,65 млн руб., то составим неравенство:

$$(2k - 1{,}8) + (1{,}8k - 1{,}6) + (1{,}6k - 1{,}3) + (1{,}3k - 0{,}9) + \\ +(0{,}9k - 0{,}5) + 0{,}5k < 2{,}65$$

II. Вычисления

$$(2k - 1{,}8) + (1{,}8k - 1{,}6) + (1{,}6k - 1{,}3) + (1{,}3k - 0{,}9) + \\ +(0{,}9k - 0{,}5) + 0{,}5k < 2{,}65 \Rightarrow 8{,}1k - 6{,}1 < 2{,}65 \Rightarrow$$

$=> 8{,}1k < 8{,}75 => k < 1\frac{13}{162} => 1 + \frac{r}{100} < 1\frac{13}{162} =>$
$=> \frac{r}{100} < \frac{13}{162} => r < \frac{1300}{162} => r < 8\frac{2}{81}$
Таким образом, при условии, что $r \in \mathbb{Z}, r_{max} = 8$
Ответ: 8.

14. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн руб.;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн рублей.

Дано:
$S = 4{,}2$ млн руб.
$p = r\% = \frac{r}{100}$
$n = 5$ лет
$c_1 + \cdots + c_5 =$
6,1 млн руб.
$c_4 = c_5 = x$

$r-?$

Решение:
Обозначим $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \ldots (*)$
Пусть платежи выплачиваются в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
2016	июль	S	
2017	январь	$k \cdot S$	
	март	$k \cdot S - c_1 = S$	$(k-1)S$
	июль	S	
2018	январь	$k \cdot S$	
	март	$k \cdot S - c_2 = S$	$(k-1)S$
	июль	S	
2019	январь	$k \cdot S$	
	март	$k \cdot S - c_3 = S$	$(k-1)S$
	июль	S	
2020	январь	$k \cdot S$	
	март	$k \cdot S - x$	x
	июль	$k \cdot S - x$	
2021	январь	$(k \cdot S - x)k$	

	март	$k^2S - kx - x = 0$	x
	июль	0	

Т.к. общая сумма выплат равна 6,1 млн руб. и кредит выплачен полностью, то составим систему уравнений:

$$\begin{cases}(k-1)S+(k-1)S+(k-1)S+x+x=6{,}1\\ k^2S-kx-x=0\end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases}(k-1)S+(k-1)S+(k-1)S+x+x=6{,}1\\ k^2S-kx-x=0\end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} x=\frac{6{,}1-3S(k-1)}{2}\\ k^2S-x(k+1)=0\end{cases} =>$$

$$=> k^2 4{,}2-\frac{6{,}1-3\cdot 4{,}2(k-1)}{2}(k+1)=0 =>$$

$$=> 8{,}4k^2-6{,}1(k+1)+12{,}6(k^2-1)=0 =>$$

$$=> 21k^2-6{,}1k-18{,}7=0 =>$$

$$=> 210k^2-61k-187=0 =>$$

$$=> \left[\begin{array}{l} k_1=-\frac{17}{21}-\text{не удовл. усл.}\,(*)\\ k_2=\frac{11}{10}\end{array}\right. => 1+\frac{r}{100}=\frac{11}{10} =>$$

$$=> \frac{r}{100}=\frac{1}{10} => r=10.$$

Таким образом, каждый январь долг возрастал на 10%.

Ответ: 10.

Равномерно уменьшающиеся платежи

1. 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

Дано:

S – сумма кредита

$p = 4\% = \frac{1}{25}$

$n = 14$ месяцев

$c_1 + \dots + c_{14} =$ 1,3 млн руб.

x – фиксированный платеж

S–?

Решение:

$x = \frac{S}{n} => x = \frac{S}{14}$

I. Строим модель

1) $S + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}\boldsymbol{S} = \frac{26}{25}S$ – долг перед 1-ым платежом

$\frac{26}{25}S - \left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}\boldsymbol{S}\right) = S - x$ – долг после 1-го платежа

Платеж: $x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}\boldsymbol{S}$

2) $(S - x) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{x}) = \frac{26}{25}(S - x)$ – долг перед 2-ым платежом

$\frac{26}{25}(S - x) - \left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{x})\right) = S - 2x$ – долг после 2-го платежа

Платеж: $x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{x})$

3) $(S - 2x) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \frac{26}{25}(S - 2x)$ – долг перед 3-им платежом

$\frac{26}{25}(S - 2x) - \left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})\right) = S - 3x$ – долг после 3-го платежа

Платеж: $x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})$

…

13) $(S - 12x) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{12}\boldsymbol{x}) =$

$= \frac{26}{25}(S - 12x)$ – долг перед 13-ым платежом

$\frac{26}{25}(S - 12x) - \left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{12}\boldsymbol{x})\right) =$

$= S - 13x$ – долг после 13-го платежа

Платеж: $x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{12}\boldsymbol{x})$

14) $(S - 13x) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{13}\boldsymbol{x}) =$

	$=\frac{26}{25}(S-13x)$ – долг перед 13-ым платежом $\frac{26}{25}(S-13x)-\frac{26}{25}(S-13x)=0$ – долг после 13-го платежа Платеж: $\frac{26}{25}(S-13x)$

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1+\cdots+c_{14}=\left(x+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}\boldsymbol{S}\right)+\left(x+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{x})\right)+\left(x+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S}-\mathbf{2}\boldsymbol{x})\right)+$$

$$+\cdots+\left(x+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}}(\boldsymbol{S}-\mathbf{12}\boldsymbol{x})\right)+\frac{26}{25}(S-13x)=13x+$$

$$+\frac{1}{25}\big(S+(S-x)+(S-2x)+\cdots+(S-12x)\big)+\frac{26}{25}(S-13x)=$$

$$=13x+\frac{1}{25}\big(13S-x(1+2+\cdots+12)\big)+\frac{26}{25}(S-13x)$$

$1+2+\cdots+12$ – сумма арифметической прогрессии с $d=1$.

$1+2+\cdots+12=\frac{1+12}{2}\cdot 12=78.$

Выражение примет вид:

$$c_1+\cdots+c_{14}=13x+\frac{1}{25}(13S-x\cdot 78)+\frac{26}{25}(S-13x)=$$

$$=\frac{39}{25}S+13x-\frac{416}{25}x=\frac{39}{25}S-\frac{91}{25}x.$$

Т.к. общая сумма выплат равна 1,3 млн руб. и $x=\frac{S}{14}$, то составим уравнение:

$$\frac{39}{25}S-\frac{91}{25}\cdot\frac{S}{14}=1{,}3.$$

II. Вычисления

$$\frac{39}{25}S-\frac{91}{25}\cdot\frac{S}{14}=1{,}3\Rightarrow\frac{455}{350}S=\frac{13}{10}\Rightarrow S=\frac{13\cdot 350}{10\cdot 455}=1$$

Таким образом, в кредит следует взять 1 млн рублей.

Ответ: 1.

2. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что за последние 12 месяцев нужно выплатить банку 960500 рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Дано:
S – сумма кредита
$p = 2\% = \frac{1}{50}$
$n = 24$ месяца
$c_{13} + \cdots + c_{24} =$ 960500 руб.
x – фиксированный платеж

S–?

Решение:
$x = \frac{S}{n} => x = \frac{S}{24}$

I. Строим модель

1) $S + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}\boldsymbol{S} = \frac{51}{50}S$ – долг перед 1-ым платежом

$\frac{51}{50}S - \left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}\boldsymbol{S}\right) = S - x$ – долг после 1-го платежа

Платеж: $x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}\boldsymbol{S}$

2) $(S - x) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{x}) = \frac{51}{50}(S - x)$ – долг перед 2-ым платежом

$\frac{51}{50}(S - x) - \left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{x})\right) = S - 2x$ – долг после 2-го платежа

Платеж: $x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{x})$

3) $(S - 2x) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{2}\boldsymbol{x}) = \frac{51}{50}(S - 2x)$ – долг перед 3-им платежом

$\frac{51}{50}(S - 2x) - \left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})\right) =$
$= S - 3x$ – долг после 3-го платежа

Платеж: $x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{2}\boldsymbol{x})$

…

13) $(S - 12x) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{12}\boldsymbol{x}) =$
$= \frac{51}{50}(S - 12x)$ – долг перед 13-ым платежом

$\frac{51}{50}(S - 12x) - \left(x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}(\boldsymbol{S} - \mathbf{12}\boldsymbol{x})\right) =$

$= S - 13x$ – долг после 13-го платежа

Платеж: $x + \boldsymbol{\frac{1}{50}(S - 12x)}$

…

23) $(S - 22x) + \boldsymbol{\frac{1}{50}(S - 22x)} =$

$= \frac{51}{50}(S - 22x)$ – долг перед 23-им платежом

$\frac{51}{50}(S - 22x) - \left(x + \boldsymbol{\frac{1}{50}(S - 22x)}\right) =$

$= S - 23x$ – долг после 23-го платежа

Платеж: $x + \boldsymbol{\frac{1}{50}(S - 22x)}$

24) $(S - 23x) + \boldsymbol{\frac{1}{50}(S - 23x)} =$

$= \frac{51}{50}(S - 23x)$ – долг перед 24-ым платежом

$\frac{51}{50}(S - 23x) - \frac{51}{50}(S - 23x) = 0$ – долг после 24-го платежа

Платеж: $\frac{51}{50}(S - 23x)$

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_{13} + \dots + c_{24} = \left(x + \boldsymbol{\frac{1}{50}(S - 12x)}\right) + \dots + \left(x + \boldsymbol{\frac{1}{50}(S - 22x)}\right) +$$

$$+ \frac{51}{50}(S - 23x) = 11x + \frac{1}{50}\big((S - 12x) + \dots + (S - 22x)\big) +$$

$$+ \frac{51}{50}(S - 23x) = 11x + \frac{1}{50}(11S - x(12 + \dots + 22)) + \frac{51}{50}(S - 23x)$$

$12 + \dots + 22$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$12 + \dots + 22 = \frac{12+22}{2} \cdot 11 = 187.$

Выражение примет вид:

$$c_{13} + \dots + c_{24} = 11x + \frac{1}{50}(11S - x \cdot 187) + \frac{51}{50}(S - 23x) =$$

$$+ \frac{62}{50}S + 11x - \frac{1360}{50}x = \frac{31}{25}S - \frac{81}{5}x.$$

Т.к. сумма выплат за последние 12 месяцев 960500 руб. и $x = \frac{S}{24}$, то составим уравнение:

$$\frac{31}{25}S - \frac{81}{5} \cdot \frac{S}{24} = 960500.$$

II. Вычисления

$$\frac{31}{25}S-\frac{81}{5}\cdot\frac{S}{24}=960500 => \frac{113}{200}S=960500 =>$$

$$=> S=\frac{960500\cdot 200}{113}=1700000$$

Таким образом, в кредит планируется взять 1700000 рублей.

Ответ: 1700000.

3. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Дано:

S – сумма кредита

$p=2\%=\frac{1}{50}$

$n=24$ месяца

$c_1+\dots+c_{12}=$ 1370 тыс. руб.

x – фиксированный платеж

$S-?$

Решение:

$x=\frac{S}{n} => x=\frac{S}{24}$

Пусть платеж выплачивается 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}02S$	
	07.02	$S-x$	$x+0{,}02S$
	15.02	$S-x$	
2	01.03	$1{,}02(S-x)$	
	07.03	$S-2x$	$x+0{,}02(S-$ $-x)$
	15.03	$S-2x$	
3	01.04	$1{,}02(S-2x)$	
	07.04	$S-3x$	$x+0{,}02(S-$ $-2x)$
	15.04	$S-3x$	
	…		

12	01.01	$1{,}02(S - 11x)$	
	07.01	$S - 12x$	$x + 0{,}02(S - -11x)$
	15.01	$S - 12x$	
	…		

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$c_1 + \dots + c_{12} = (x + 0{,}02S) + \big(x + 0{,}02(S - x)\big) + \dots +$
$+\big(x + 0{,}02(S - 11x)\big) = 12x +$
$+0{,}02\big(S + (S - x) + \dots + (S - 11x)\big) = 12x +$
$+0{,}02\big(12S - x(1 + \dots + 11)\big)$

$1 + \dots + 11$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$1 + \dots + 11 = \frac{1+11}{2} \cdot 11 = 66.$

Выражение примет вид:

$c_1 + \dots + c_{12} = 12x + 0{,}02(12S - 66x) = 12x + \frac{12}{50}S - \frac{66}{50}x =$
$= \frac{6}{25}S + \frac{267}{25}x.$

Т.к. сумма выплат за первые 12 месяцев 1370 тыс. руб. и $x = \frac{S}{24}$, то составим уравнение:

$\frac{6}{25}S + \frac{267}{25} \cdot \frac{S}{24} = 1370.$

II. Вычисления

$\frac{6}{25}S + \frac{267}{25} \cdot \frac{S}{24} = 1370 => \frac{411}{600}S = 1370 => S = \frac{1370 \cdot 600}{411} = 2000$

Таким образом, в кредит планируется взять 2000 тыс. руб. или 2000000 рублей.

Ответ: 2000000.

4. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Дано:

S – сумма кредита

$p = 5\% = \frac{1}{20}$

$n = 5$ месяцев

x – фиксированный платеж

$S - 100\%$

$c_1 + \dots + c_5 - y\%$

$y\% = \frac{(c_1 + \dots + c_5) \cdot 100\%}{S}$

y–?

Решение:

$x = \frac{S}{n} => x = \frac{S}{5}$

Пусть платеж выплачивается 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}05S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}05S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}05(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}05(S - -x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}05(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}05(S - -2x)$
	15.04	$S - 3x$	
4	01.05	$1{,}05(S - 3x)$	
	07.05	$S - 4x$	$x + 0{,}05(S - -3x)$
	15.05	$S - 4x$	
5	01.06	$1{,}05(S - 4x)$	
	07.06	0	$1{,}05(S - 4x)$
	15.06	0	

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_5 = (x + 0{,}05S) + \big(x + 0{,}05(S - x)\big) +$$
$$+\big(x + 0{,}05(S - 2x)\big) + \big(x + 0{,}05(S - 3x)\big) + 1{,}05(S - 4x) =$$
$$= 4x + 0{,}05\big(4S - x(1 + 2 + 3)\big) + 1{,}05(S - 4x) = 4x +$$
$$+0{,}05(4S - 6x) + 1{,}05(S - 4x) = 4x + \frac{4}{20}S - \frac{6}{20}x +$$

$+\frac{21}{20}S-\frac{21\cdot 4}{20}x=4x+\frac{1}{5}S-\frac{3}{10}x+\frac{21}{20}S-\frac{21}{5}x=\frac{5}{4}S-\frac{1}{2}x$

II. Вычисления

$y\%=\frac{(c_1+\dots+c_5)\cdot 100\%}{S}$ и $x=\frac{S}{5}$, тогда

$y\%=\frac{\frac{5}{4}S-\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{5}}{S}\cdot 100\%=\frac{S\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{10}\right)}{S}\cdot 100\%=\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{10}\right)\cdot 100\%=$

$=\frac{23}{20}\cdot 100\%=115\%$

Таким образом, 115% от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования.

Ответ: 115.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть дога;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платеж составит 9 млн рублей?

Дано:

$S=28$ млн руб.

$p=25\%=\frac{1}{4}$

n – количество лет

x – фиксированный платеж

$c_{max}=9$ млн руб.

$c_1+\dots+c_n-?$

Решение:

$x=\frac{S}{n}=>x=\frac{28}{n}$

$c_{max}=9=>c_1=9$

Пусть платеж выплачивается в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	июль	S	
1	январь	$1{,}25S$	
	март	$S-x$	$x+0{,}25S$
	июль	$S-x$	

$c_1=9, x=\frac{28}{n}, S=28=>$

$=>9=\frac{28}{n}+\frac{1}{4}\cdot 28=>$

$=> 9 = \frac{28}{n} + 7 => \frac{28}{n} = 2 => n = 14$

Таким образом, кредит планируется взять на 14 лет и $x = \frac{28}{14} = 2$.

2	январь	$1{,}25(S - x)$	
	март	$S - 2x$	$x + 0{,}25(S - x)$
	июль	$S - 2x$	
3	январь	$1{,}25(S - 2x)$	
	март	$S - 3x$	$x + 0{,}25(S - 2x)$
	июль	$S - 3x$	
	…		
13	январь	$1{,}25(S - 12x)$	
	март	$S - 13x$	$x + 0{,}25(S - 12x)$
	июль	$S - 13x$	
14	январь	$1{,}25(S - 13x)$	
	март	0	$1{,}25(S - 13x)$
	июль	0	

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$c_1 + \cdots + c_{14} = (x + 0{,}25S) + \big(x + 0{,}25(S - x)\big) + \cdots +$
$+\big(x + 0{,}25(S - 12x)\big) + 1{,}25(S - 13x) = 13x +$
$+0{,}25\big(13S - x(1 + 2 + \cdots + 12)\big) + 1{,}25(S - 13x)$

$1 + \cdots + 12$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$1 + \cdots + 12 = \frac{1+12}{2} \cdot 12 = 78.$

Выражение примет вид:

$c_1 + \cdots + c_{14} = 13x + 0{,}25(13S - 78x) + 1{,}25(S - 13x) =$
$= 13x + \frac{13}{4}S - \frac{39}{2}x + \frac{5}{4}S - \frac{5\cdot 13}{4}x = \frac{18}{4}S - \frac{91}{4}x$

II. Вычисления

$x = 2$ и $S = 28$, тогда

$c_1 + \cdots + c_{14} = \frac{18}{4} \cdot 28 - \frac{91}{4} \cdot 2 = 18 \cdot 7 - \frac{91}{2} = 126 - 45{,}5 = 80{,}5$

Таким образом, общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 80,5 млн руб. или 80500000 рублей.
Ответ: 80500000.

6. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть дога;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платеж составит 1,25 млн рублей?

Дано:
$S = 9$ млн руб.
$p = 25\% = \frac{1}{4}$
n – количество лет
x – фиксированный платеж
$c_{min} = 1{,}25$ млн руб.

$c_1 + \cdots + c_n -?$

Решение:
$x = \frac{S}{n} => x = \frac{9}{n}$
$c_{min} = 1{,}25 => c_n = 1{,}25$
Пусть платеж выплачивается в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	июль	S	
1	январь	$1{,}25S$	
	март	$S - x$	$x + 0{,}25S$
	июль	$S - x$	
2	январь	$1{,}25(S - x)$	
	март	$S - 2x$	$x + 0{,}25(S - x)$
	июль	$S - 2x$	
3	январь	$1{,}25(S - 2x)$	
	март	$S - 3x$	$x + 0{,}25(S - 2x)$
	июль	$S - 3x$	
	…		
$n - 1$	январь	$1{,}25(S - (n - 2)x)$	

	март	$S-(n-1)x$	$x+0{,}25(S-(n-2)x)$
	июль	$S-(n-1)x$	
n	январь	$1{,}25(S-(n-1)x)$	
	март	0	$1{,}25(S-(n-1)x)$
	июль	0	

$c_n = 1{,}25, x = \frac{9}{n}, S = 9 =>$

$=> 1{,}25 = 1{,}25\left(9-(n-1)\cdot\frac{9}{n}\right) =>$

$=> 1 = 9-(n-1)\cdot\frac{9}{n} =>$

$=> (n-1)\cdot\frac{9}{n} = 8 =>$

$=> 9n-9 = 8n => n = 9$

Таким образом, кредит планируется взять на 9 лет и $x = \frac{9}{9} = 1$.

Последние два года в таблице будут выглядеть следующим образом:

8	январь	$1{,}25(S-7x)$	
	март	$S-8x$	$x+0{,}25(S-7x)$
	июль	$S-8x$	
9	январь	$1{,}25(S-8x)$	
	март	0	$1{,}25(S-8x)$
	июль	0	

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$c_1+\dots+c_9 = (x+0{,}25S)+\big(x+0{,}25(S-x)\big)+\dots+$
$+\big(x+0{,}25(S-7x)\big)+1{,}25(S-8x) = 8x+$
$+0{,}25\big(8S-x(1+2+\dots+7)\big)+1{,}25(S-8x)$

$1+\dots+7$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$1+\dots+7 = \frac{1+7}{2}\cdot 7 = 28.$

Выражение примет вид:

$$c_1 + \dots + c_9 = 8x + 0{,}25(8S - 28x) + 1{,}25(S - 8x) =$$
$$= 8x + 2S - 7x + \frac{5}{4}S - 10x = \frac{13}{4}S - 9x$$

II. Вычисления

$x = 1$ и $S = 9$, тогда

$$c_1 + \dots + c_9 = \frac{13}{4} \cdot 9 - 9 \cdot 1 = 29{,}25 - 9 = 20{,}25$$

Таким образом, общая сумма выплат после полного погашения кредита будет равна 20,25 млн руб. или 20250000 рублей.

Ответ: 20250000.

7. Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину.

Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку (сверх кредита)?

Дано:

S – сумма кредита

$p = 12\% = \frac{3}{25}$

$n = 9$ месяцев

x – фиксированный платеж

$S - 100\%$

$c_1 + \dots + c_9 - y\%$

$y\% = \frac{(c_1 + \dots + c_9) \cdot 100\%}{S}$

$y - 100\%$ – ?

Решение:

$x = \frac{S}{n} => x = \frac{S}{9}$

Пусть кредит взяли 15 июля, долг увеличивается 27 числа, а платеж выплачивается 28 числа.

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.07	S	
1	27.07	$1{,}12S$	
	28.07	$S - x$	$x + 0{,}12S$
2	27.08	$1{,}12(S - x)$	
	28.08	$S - 2x$	$x + 0{,}12(S - x)$
3	27.09	$1{,}12(S - 2x)$	
	28.09	$S - 3x$	$x + 0{,}12(S - 2x)$
	…		
8	27.02	$1{,}12(S - 7x)$	
	28.02	$S - 8x$	$x + 0{,}12(S - 7x)$
9	27.03	$1{,}12(S - 8x)$	
	28.03	0	$1{,}12(S - 8x)$

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:
$c_1+\dots+c_9=(x+0{,}12S)+\big(x+0{,}12(S-x)\big)+\dots+$
$+\big(x+0{,}12(S-7x)\big)+1{,}12(S-8x)=8x+$
$+0{,}12\big(8S-x(1+2+\dots+7)\big)+1{,}12(S-8x)$
$1+\dots+7$ – сумма арифметической прогрессии с $d=1$.
$1+\dots+7=\frac{1+7}{2}\cdot 7=28$.
Выражение примет вид:
$c_1+\dots+c_9=8x+0{,}12(8S-28x)+1{,}12(S-8x)=$
$=8x+\frac{24}{25}S-\frac{84}{25}x+\frac{28}{25}S-\frac{224}{25}x=\frac{52}{25}S-\frac{108}{25}x$
II. Вычисления
$y\%=\frac{(c_1+\dots+c_5)\cdot 100\%}{S}$ и $x=\frac{S}{9}$, тогда
$y\%=\frac{\frac{52}{25}S-\frac{108}{25}\cdot\frac{S}{9}}{S}\cdot 100\%=\left(\frac{52}{25}-\frac{12}{25}\right)\cdot 100\%=\frac{8}{5}\cdot 100\%=160\%$
$160\%-100\%=60\%$.
Таким образом, 60% от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку (сверх кредита).
Ответ: 60.

8. 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что десятая выплата составила 106 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

Дано:
S – сумма кредита
$p = 1\% = \frac{1}{100}$
$n = 15$ месяцев
x – фиксированный платеж
$c_{10} = 106$ тыс. руб.

$c_1 + \dots + c_{15}$ – ?

Решение:
$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{15}$
Пусть платеж выплачивается 7 числа.
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}01S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}01S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}01(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}01(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}01(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}01(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	…		
10	01.11	$1{,}01(S - 9x)$	
	07.11	$S - 10x$	$x + 0{,}01(S - 9x)$
	15.11	$S - 10x$	
	…		
14	01.03	$1{,}01(S - 13x)$	
	07.03	$S - 14x$	$x + 0{,}01(S - 13x)$
	15.03	$S - 14x$	
15	01.04	$1{,}01(S - 14x)$	
	07.04	0	$x + 0{,}01(S - 14x)$
	15.04	0	

$c_{10} = 106$, $c_{10} = x + 0{,}01(S - 9x)$ и $x = \frac{S}{15} \Rightarrow$

$$\frac{S}{15} + 0{,}01\left(S - 9 \cdot \frac{S}{15}\right) = 106 \Rightarrow \frac{S}{15} + \frac{S}{100} - \frac{3S}{500} = 106 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{106S}{1500} = 106 \Rightarrow \frac{S}{1500} = 1 \Rightarrow S = 1500$$

Таким образом, сумма кредита равно 1500 тыс. руб.
Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1 + \dots + c_{15} = (x + 0{,}01S) + \big(x + 0{,}01(S - x)\big) + \dots +$$
$$+\big(x + 0{,}01(S - 13x)\big) + 1{,}01(S - 14x) = 14x +$$
$$+0{,}01\big(14S - x(1 + 2 + \dots + 13)\big) + 1{,}01(S - 14x)$$

$1 + \dots + 13$ – сумма арифметической прогрессии с $d = 1$.

$1 + \dots + 13 = \frac{1+13}{2} \cdot 13 = 91.$

Выражение примет вид:

$c_1 + \dots + c_{15} = 14x + 0{,}01(14S - 91x) + 1{,}01(S - 14x) =$

$= 14x + \frac{7}{50}S - \frac{91}{100}x + \frac{101}{100}S - \frac{707}{50}x = \frac{23}{20}S - \frac{21}{20}x$

II. Вычисления

$S = 1500$, тогда $x = \frac{1500}{15} = 100 \Rightarrow c_1 + \dots + c_{15} =$

$= \frac{23}{20} \cdot 1500 - \frac{21}{20} \cdot 10 = 1725 - 105 = 1620.$

Таким образом, 1620 тыс. руб. или 1620000 рублей нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования.

Ответ: 1620000.

9. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку за первые 12 месяцев?

Дано:

$S = 2{,}4$ млн руб.

$p = 3\% = \frac{3}{100}$

$n = 24$ месяца

x – фиксированный платеж

$c_1 + \dots + c_{12} - ?$

Решение:

$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{2{,}4}{24} = 0{,}1$

Пусть платеж выплачивается 7 числа.

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}03S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}03S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}03(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}03(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}03(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}03(S - 2x)$

		15.04	$S-3x$	
		…		
	12	01.01	$1{,}03(S-11x)$	
		07.01	$S-12x$	$x+0{,}03(S-11x)$
		15.01	$S-12x$	
		…		

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:

$$c_1+\cdots+c_{12}=(x+0{,}03S)+\big(x+0{,}03(S-x)\big)+\cdots+$$
$$+\big(x+0{,}03(S-11x)\big)=12x+0{,}03\big(12S-x(1+2+\cdots+11)\big)=$$
$$=12x+0{,}03(12S-66x)=12x+\frac{9}{25}S-\frac{99}{50}x=\frac{9}{25}S+\frac{501}{50}x$$

II. Вычисления

$$S=2{,}4,\ x=0{,}1 \Rightarrow c_1+\cdots+c_{12}=\frac{9}{25}\cdot\frac{12}{5}+\frac{501}{50}\cdot\frac{1}{10}=\frac{432}{500}+\frac{501}{500}=$$
$$=\frac{933}{500}=1{,}866$$

Таким образом, 1,866 млн руб. или 1866000 рублей нужно вернуть банку за первые 12 месяцев.

Ответ: 1866000.

10. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 0,3 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение второго года кредитования?

Дано:
$S = 0{,}3$ млн руб.
$p = 3\% = \frac{3}{100}$
$n = 24$ месяца
x – фиксированный платеж

$c_{13} + \dots + c_{24}$ – ?

Решение:
$x = \frac{S}{n} => x = \frac{0{,}3}{24} = \frac{1}{80}$
Пусть платеж выплачивается 7 числа.
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}03S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}03S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}03(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}03(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}03(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}03(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	…		
12	01.01	$1{,}03(S - 11x)$	
	07.01	$S - 12x$	$x + 0{,}03(S - 11x)$
	15.01	$S - 12x$	
13	01.02	$1{,}03(S - 12x)$	
	07.02	$S - 13x$	$x + 0{,}03(S - 12x)$
	15.02	$S - 13x$	
	…		
23	01.12	$1{,}03(S - 22x)$	
	07.12	$S - 23x$	$x + 0{,}03(S - 22x)$
	15.12	$S - 23x$	
24	01.01	$1{,}03(S - 23x)$	
	07.01	0	$1{,}03(S - 23x)$
	15.01	0	

Составим выражение (сумму платежей) и упростим:
$c_{13} + \dots + c_{24} = \big(x + 0{,}03(S - 12x)\big) + \dots + \big(x + 0{,}03(S - 22x)\big) + +1{,}03(S - 23x) = 11x + 0{,}03\big(11S - x(12 + \dots + 22)\big) + 1{,}03(S - 23x) = 11x + 0{,}03(11S - 187x) + 1{,}03(S - 23x) = 11x + \frac{33}{100}S - \frac{561}{100}x + \frac{103}{100}S - \frac{2369}{100}x = \frac{136}{100}S - \frac{1830}{100}x = \frac{34}{25}S - \frac{183}{10}x$

II. Вычисления

$S = \frac{3}{10}$, $\quad x = \frac{1}{80} => c_{13} + \dots + c_{24} = \frac{34}{25} \cdot \frac{3}{10} - \frac{183}{10} \cdot \frac{1}{80} = \frac{1632}{4000} - \frac{915}{4000} = \frac{717}{4000} = 0{,}17925$

Таким образом, 0,17925 млн руб. или 179250 рублей нужно вернуть банку в течение второго года кредитования.

Ответ: 179250.

11. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку за последние 12 месяцев?

Дано:

S – сумма кредита

$p = 2\% = \frac{1}{50}$

$n = 24$ месяца

x – фиксированный платеж

$c_1 + \dots + c_{12} = 2466$ тыс. руб.

$c_{13} + \dots + c_{24}$ – ?

Решение:

$x = \frac{S}{n} => x = \frac{S}{24}$

Пусть платеж выплачивается 7 числа.

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}02S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}02(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}02(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}02(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}02(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	…		
12	01.01	$1{,}02(S - 11x)$	

	07.01	$S-12x$	$x+0{,}02(S-11x)$
	15.01	$S-12x$	
13	01.02	$1{,}02(S-12x)$	
	07.02	$S-13x$	$x+0{,}02(S-12x)$
	15.02	$S-13x$	
	…		
23	01.12	$1{,}02(S-22x)$	
	07.12	$S-23x$	$x+0{,}02(S-22x)$
	15.12	$S-23x$	
24	01.01	$1{,}02(S-23x)$	
	07.01	0	$1{,}02(S-23x)$
	15.01	0	

Составим выражения (суммы платежей) и упростим:

$c_1+\dots+c_{12}=(x+0{,}02S)+\big(x+0{,}02(S-x)\big)+\dots+\big(x+0{,}02(S-11x)\big)=12x+0{,}02\big(12S-x(1+\dots+11)\big)=12x+0{,}02(12S-66x)=\frac{6}{25}S+\frac{267}{25}x$

$c_{13}+\dots+c_{24}=\big(x+0{,}02(S-12x)\big)+\dots+\big(x+0{,}02(S-22x)\big)+$ $+1{,}02(S-23x)=11x+0{,}02\big(11S-x(12+\dots+22)\big)+1{,}02(S-23x)=11x+0{,}02(11S-187x)+1{,}02(S-23x)=11x+\frac{11}{50}S-\frac{187}{50}x+\frac{51}{50}S-\frac{1173}{50}x=\frac{31}{25}S-\frac{81}{5}x$

II. Вычисления

$c_1+\dots+c_{12}=2466, x=\frac{S}{24}=>\frac{6}{25}S+\frac{267}{25}\cdot\frac{S}{24}=2466=>\frac{411}{600}S=2466=>S=3600=>c_{13}+\dots+c_{24}=\frac{31}{25}\cdot 3600-\frac{81}{5}\cdot\frac{3600}{24}=4464-2430=2034$

Таким образом, 2034 тыс. руб. или 2034000 рублей нужно вернуть банку за последние 12 месяцев.

Ответ: 2034000.

12. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 958,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

Дано:

S – сумма кредита

$p = 1\% = \frac{1}{100}$

$n = 24$ месяца

x – фиксированный платеж

$c_{13} + \cdots + c_{24} = 958{,}5$ тыс. руб.

$c_1 + \cdots + c_{12} - ?$

Решение:

$x = \frac{S}{n} => x = \frac{S}{24}$

Пусть платеж выплачивается 7 числа.

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}01S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}01S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}01(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}01(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}01(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}01(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	…		
12	01.01	$1{,}01(S - 11x)$	
	07.01	$S - 12x$	$x + 0{,}01(S - 11x)$
	15.01	$S - 12x$	
13	01.02	$1{,}01(S - 12x)$	
	07.02	$S - 13x$	$x + 0{,}01(S - 12x)$
	15.02	$S - 13x$	
	…		

23	01.12	$1{,}01(S-22x)$	
	07.12	$S-23x$	$x+0{,}01(S-22x)$
	15.12	$S-23x$	
24	01.01	$1{,}01(S-23x)$	
	07.01	0	$1{,}01(S-23x)$
	15.01	0	

Составим выражения (суммы платежей) и упростим:

$$c_1+\dots+c_{12}=(x+0{,}01S)+\big(x+0{,}01(S-x)\big)+\dots+\big(x+0{,}01(S-11x)\big)=12x+0{,}01\big(12S-x(1+\dots+11)\big)=12x+0{,}01(12S-66x)=\frac{6}{50}S+\frac{567}{50}x$$

$$c_{13}+\dots+c_{24}=\big(x+0{,}01(S-12x)\big)+\dots+\big(x+0{,}01(S-22x)\big)+1{,}01(S-23x)=11x+0{,}01\big(11S-x(12+\dots+22)\big)+1{,}01(S-23x)=11x+0{,}01(11S-187x)+1{,}01(S-23x)=11x+\frac{11}{100}S-\frac{187}{100}x+\frac{101}{100}S-\frac{2323}{100}x=\frac{28}{25}S-\frac{141}{10}x$$

II. Вычисления

$$c_{13}+\dots+c_{24}=958{,}5, x=\frac{S}{24}\Rightarrow\frac{28}{25}S-\frac{141}{10}\cdot\frac{S}{24}=958{,}5\Rightarrow\frac{639}{1200}S=958{,}5\Rightarrow S=1800\Rightarrow c_1+\dots+c_{12}=\frac{6}{50}\cdot1800+\frac{567}{50}\cdot\frac{1800}{24}=216+850{,}5=1066{,}5$$

Таким образом, 1066,5 тыс. руб. или 1066500 рублей нужно выплатить банку за первые 12 месяцев.

Ответ: 1066500.

13. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4,5 млн рублей на срок 9 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей.

Дано:

$S = 4{,}5$ млн руб.

$p = r\% = \frac{r}{100}$

$n = 9$ лет

$c_{max} \leq 1{,}4$ млн руб.

$c_{min} \geq 0{,}6$ млн руб.

x – фиксированный платеж

$r -?$

Решение:

$x = \frac{S}{n} => x = \frac{4{,}5}{9} = 0{,}5$

$c_{max} = c_1 => c_1 \leq 1{,}4;\ c_{min} = c_9 => c_9 \geq 0{,}6$

Пусть $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \ldots (*)$, т.е. $\frac{r}{100} = k - 1$

Пусть платежи выплачиваются в марте

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	июль	S	
1	январь	kS	
	март	$S - x$	$x + (k-1)S$
	июль	$S - x$	
2	январь	$k(S - x)$	
	март	$S - 2x$	$x + (k - 1)(S - x)$
	июль	$S - 2x$	
3	январь	$k(S - 2x)$	
	март	$S - 3x$	$x + (k - 1)(S - 2x)$
	июль	$S - 3x$	
	…		
8	январь	$k(S - 7x)$	
	март	$S - 8x$	$x + (k - 1)(S - 7x)$
	июль	$S - 8x$	
9	январь	$k(S - 8x)$	
	март	0	$k(S - 8x)$
	июль	0	

Т.к. наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,4 млн рублей, а наименьший – не менее 0,6 млн рублей, то составим систему неравенств:

$\begin{cases} x + (k-1)S \leq 1{,}4 \\ k(S-8x) \geq 0{,}6 \end{cases}$

II. Вычисления

$$\begin{cases} x + (k-1)S \leq 1{,}4 \\ k(S-8x) \geq 0{,}6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-1 \leq \frac{1{,}4-x}{S} \\ k \geq \frac{0{,}6}{S-8x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq \frac{1{,}4-x}{S} + 1 \\ k \geq \frac{0{,}6}{S-8x} \end{cases}$$

Т.к. $S = 4{,}5; x = 0{,}5; k = 1 + \frac{r}{100}$, то система примет вид:

$$\begin{cases} 1 + \frac{r}{100} \leq \frac{1{,}4-0{,}5}{4{,}5} + 1 \\ 1 + \frac{r}{100} \geq \frac{0{,}6}{4{,}5-8\cdot 0{,}5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \leq \frac{0{,}9\cdot 100}{4{,}5} \\ \frac{r}{100} \geq \frac{0{,}6}{0{,}5} - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r \leq 20 \\ r \geq 20 \end{cases}.$$

Таким образом, каждый январь долг возрастал на 20%.

Ответ: 20.

14. Лев взял кредит в банке на срок 40 месяцев. По договору Лев должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $p\%$ этой суммы, затем следует платеж Льва.

а) Ежемесячные платежи подбираются таким образом, чтобы долг уменьшался равномерно.

б) Известно, что наибольший платеж Льва был в 25 раз меньше первоначальной суммы долга. Найдите p.

Дано:

S – сумма кредита

$p = p\% = \frac{p}{100}$

$n = 40$ месяцев

$c_{max} = \frac{S}{25}$

x – фиксированный платеж

$p -?$

Решение:

$x = \frac{S}{n} \Rightarrow x = \frac{S}{40}$

$c_{max} = c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{S}{25}$

Пусть $1 + \frac{p}{100} = k, k > 1 \ldots (*)$, т.е. $\frac{p}{100} = k - 1$

Пусть кредит взяли 15.07, долг увеличивается 27 числа, платежи выплачиваются 28 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.07	S	
1	28.07	kS	

	29.07	$S-x$	$x+(k-1)S$
2	28.08	$k(S-x)$	
	29.08	$S-2x$	$x+(k-1)(S-x)$
3	28.09	$k(S-2x)$	
	29.09	$S-3x$	$x+(k-1)(S-2x)$
	…		
39	28.09	$k(S-38x)$	
	29.09	$S-39x$	$x+(k-1)(S-38x)$
40	28.10	$k(S-39x)$	
	29.10	0	$k(S-39x)$

Т.к. наибольший платеж Льва был в 25 раз меньше первоначальной суммы долга, то составим уравнение:

$x+(k-1)S=\frac{S}{25}$

II. Вычисления

Т.к. $x=\frac{S}{40}; k=1+\frac{p}{100}$, то:

$x+(k-1)S=\frac{S}{25} => \frac{S}{40}+\left(1+\frac{p}{100}-1\right)S=\frac{S}{25} =>$

$=> \frac{1}{40}+\frac{p}{100}=\frac{1}{25} => \frac{p}{100}=\frac{3}{200} => p=1{,}5.$

Таким образом, долг возрастал на 1,5%.

Ответ: 1,5.

15. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы взятой в кредит. Найдите r.

Дано:
S – сумма кредита
$p = r\% = \frac{r}{100}$
$n = 19$ месяцев
$S - 100\%$
$c_1 + \cdots + c_{19} - 130\%$
$\frac{c_1+\cdots+c_{19}}{S} = 1{,}3$
x – фиксированный платеж

$r-?$

Решение:
$x = \frac{S}{n} => x = \frac{S}{19}$
Пусть $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \ldots (*)$, т.е. $\frac{r}{100} = k - 1$
Пусть платежи выплачиваются 7 числа
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	kS	
	07.02	$S - x$	$x + (k-1)S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$k(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + (k - 1)(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$k(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + (k - 1)(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	…		
18	01.07	$k(S - 17x)$	
	07.07	$S - 18x$	$x + (k - 1)(S - 17x)$
	15.07	$S - 18x$	
19	01.08	$k(S - 18x)$	
	07.08	0	$k(S - 18x)$
	15.08	0	

Т.к общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы взятой в кредит, то составим уравнение:
$\frac{c_1+\cdots+c_{19}}{S} = 1{,}3 => \frac{(x+(k-1)S)+\cdots+\left(x+(k-1)(S-17x)\right)+k(S-18x)}{S} = 1{,}3 =>$
$=> 18x + (k-1)\left(18S - x(1+\cdots+17)\right) + k(S-18x) = 1{,}3S =>$
$18x + (k-1)(18S - 153x) + kS - 18kx = 1{,}3S => 18x + 18kS - 153kx - 18S + 153x + kS - 18kx = 1{,}3S => 171x + k(19S - 171x) - 19{,}3S = 0 => k = \frac{19{,}3S - 171x}{19S - 171x}$

II. Вычисления
Т.к. $x = \frac{S}{19}; k = 1 + \frac{r}{100}$, то:

$$1+\frac{r}{100}=\frac{19{,}3S-171\cdot\frac{S}{19}}{19S-171\cdot\frac{S}{19}} => 1+\frac{r}{100}=\frac{10{,}3}{10} => \frac{r}{100}=\frac{0{,}3}{10} => r=3.$$

Таким образом, долг возрастал на 3%.

Ответ: 3.

16. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит?

Дано:

S – сумма кредита

$p=3\%=\frac{3}{100}$

n – количество месяцев

$S-100\%$

$c_1+\dots+c_n-130\%$

$\frac{c_1+\dots+c_n}{S}=1{,}3$

x – фиксированный платеж

n–?

Решение:

$x=\frac{S}{n}$

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}03S$	
	07.02	$S-x$	$x+0{,}03S$
	15.02	$S-x$	
2	01.03	$1{,}03(S-x)$	
	07.03	$S-2x$	$x+0{,}03(S-x)$
	15.03	$S-2x$	
3	01.04	$1{,}03(S-2x)$	
	07.04	$S-3x$	$x+0{,}03(S-2x)$
	15.04	$S-3x$	
	…		
$n-1$	01.02	$1{,}03(S-(n-2)x)$	
	07.02	$S-(n-1)x$	$x+0{,}03(S-(n-2)x)$
	15.02	$S-(n-1)x$	

n	01.03	$1{,}03(S - (n-1)x)$	
	07.03	0	$1{,}03(S - (n-1)x)$
	15.03	0	

Т.к общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит, то составим уравнение:

$\frac{c_1+\cdots+c_n}{S} = 1{,}3 => \frac{(x+0{,}03S)+\cdots+\left(x+0{,}03(S-(n-2)x)\right)+1{,}03(S-(n-1)x)}{S} = 1{,}3 => (n-1)x + 0{,}03\left((n-1)S - x\left(1+\cdots+(n-2)\right)\right) + 1{,}03(S-(n-1)x) = 1{,}3S => (n-1)x + 0{,}03\left((n-1)S - x \cdot \frac{n-1}{2} \cdot (n-2)\right) + 1{,}03(S-(n-1)x) = 1{,}3S => nx - x + 0{,}03nS - 0{,}03S - \frac{0{,}03x(n-1)(n-2)}{2} + 1{,}03S - 1{,}03nx + 1{,}03x = 1{,}3S =>$

$0{,}03nS - \frac{0{,}03x(n-1)(n-2)}{2} - 0{,}03nx + 0{,}03x - 0{,}3S = 0 =>$

$=> 0{,}06nS - 0{,}03xn^2 + 0{,}09xn - 0{,}06x - 0{,}06nx + 0{,}06x - 0{,}6S = 0 => 0{,}06nS - 0{,}03xn^2 + 0{,}03xn - 0{,}6S = 0 => 2nS - xn^2 + xn - 20S = 0$

II. Вычисления

Т.к. $x = \frac{S}{n}$, то:

$2nS - xn^2 + xn - 20S = 0 \quad => 2nS - \frac{n^2S}{n} + \frac{S}{n}n - 20S = 0 =>$

$=> 2nS - nS + S - 20S = 0 => nS - 19S = 0 => n - 19 = 0 => n = 19$

Таким образом, на 19 месяцев планируется взять кредит.

Ответ: 19.

17. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей?

Дано:
$S = 16$ млн руб.
$p = 25\% = \frac{1}{4}$
n – количество лет
$c_1 + \cdots + c_n = 38$ млн руб.
x – фиксированный платеж

n–?

Решение:
$x = \frac{S}{n}$
Пусть платежи выплачиваются в марте
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	июль	S	
1	январь	$1{,}25S$	
	март	$S - x$	$x + 0{,}25S$
	июль	$S - x$	
2	январь	$1{,}25(S - x)$	
	март	$S - 2x$	$x + 0{,}25(S - x)$
	июль	$S - 2x$	
3	январь	$1{,}25(S - 2x)$	
	март	$S - 3x$	$x + 0{,}25(S - 2x)$
	июль	$S - 3x$	
	…		
$n - 1$	январь	$1{,}25(S - (n-2)x)$	
	март	$S - (n-1)x$	$x + 0{,}25(S - (n-2)x)$
	июль	$S - (n-1)x$	
n	январь	$1{,}25(S - (n-1)x)$	
	март	0	$1{,}25(S - (n-1)x)$
	июль	0	

Т.к что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей, то составим уравнение:

$c_1 + \cdots + c_n = 38 \Rightarrow (x + 0{,}25S) + \cdots + \big(x + 0{,}25(S - (n - 2)x)\big) + 1{,}25(S - (n-1)x) = 38 \Rightarrow (n-1)x + 0{,}25((n-1)S -$

$x(1+\cdots+(n-2)))+1{,}25(S-(n-1)x)=38 => (n-1)x+$
$0{,}25((n-1)S-x\cdot\frac{n-1}{2}\cdot(n-2))+1{,}25(S-(n-1)x)=38 =>$
$nx-x+0{,}25nS-0{,}25S-\frac{0{,}25x(n-1)(n-2)}{2}+1{,}25S-1{,}25nx+$
$1{,}25x=38 => 0{,}25nS-\frac{0{,}25x(n-1)(n-2)}{2}-0{,}25nx+0{,}25x+S=$
$38 => 0{,}5nS-0{,}25xn^2+0{,}75xn-0{,}5x-0{,}5nx+0{,}5x+2S=$
$76 => 0{,}5nS-0{,}25xn^2+0{,}25xn+2S=76 => 2nS-xn^2+$
$+xn+8S=304$

II. Вычисления

Т.к. $x=\frac{S}{n}; S=16$, то:

$2nS-xn^2+xn+8S=304 => 2nS-\frac{n^2S}{n}+\frac{S}{n}n+8S=304 =>$
$=> 2nS-nS+S+8S=304 => nS+9S=304 => n+9=$
$\frac{304}{S} => n+9=\frac{304}{16} => n=10$

Таким образом, на 10 лет планируется взять кредит.

Ответ: 10.

18. 15-го января в банке был взят кредит на 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;

- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько общая сумма выплат превысит сумму, взятую в кредит?

Дано:
$S = 300$ тыс. руб.
$p = 2\% = \frac{1}{50}$
$n = 21$ месяц
15.09 долг = 100 тыс. руб.
x – фиксированный платеж

$c_1 + \dots + c_{21} - S -?$

Решение:
Пусть платежи выплачиваются 7 числа
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}02S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}02(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}02(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}02(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}02(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	…		
20	01.09	$1{,}02(S - 19x)$	
	07.09	$S - 20x$	$x + 0{,}02(S - 19x)$
	15.09	$S - 20x = 100$	
21	01.10	$1{,}02 \cdot 100 = 102$	
	07.10	0	102
	15.10	0	

Составим выражение и упростим:
$c_1 + \dots + c_{21} - S = (x + 0{,}02S) + \dots + \big(x + 0{,}02(S - 19x)\big) + 102 - S = \quad 20x + 0{,}02\big(20S - x(1 + \dots + 19)\big) + 102 - S = 20x + 0{,}02(20S - 190x) + 102 - S = 20x + 0{,}4S - 3{,}8x + 102 - S = 16{,}2x - 0{,}6S + 102$

II. Вычисления
Т.к. $S = 300$ и $S - 20x = 100$, то $x = 10 =>$
$c_1 + \dots + c_{21} - S = 16{,}2x - 0{,}6S + 102 = 16{,}2 \cdot 10 - 0{,}6 \cdot 300 + 102 = 162 - 180 + 102 = 84$
Таким образом, на 84 тыс. руб. или 84000 рублей общая сумма выплат превысит сумму, взятую в кредит.
Ответ: 84000.

19. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Дано:
$S = 300$ тыс. руб.
$p = 2\% = \frac{1}{50}$
$n = 21$ месяц
15.09 долг = 100 тыс. руб.
x – фиксированный платеж

$c_1 + \dots + c_{21}$—?

Решение:
Пусть платежи выплачиваются 7 числа
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.12	S	
1	01.01	$1{,}02S$	
	07.01	$S - x$	$x + 0{,}02S$
	15.01	$S - x$	
2	01.02	$1{,}02(S - x)$	
	07.02	$S - 2x$	$x + 0{,}02(S - x)$
	15.02	$S - 2x$	
3	01.03	$1{,}02(S - 2x)$	
	07.03	$S - 3x$	$x + 0{,}02(S - 2x)$
	15.03	$S - 3x$	
	…		
20	01.08	$1{,}02(S - 19x)$	
	07.08	$S - 20x$	$x + 0{,}02(S - 19x)$
	15.08	$S - 20x = 100$	
21	01.09	$1{,}02 \cdot 100 = 102$	
	07.09	0	102
	15.09	0	

Составим выражение и упростим:

$c_1 + \cdots + c_{21} = (x + 0{,}02S) + \cdots + \big(x + 0{,}02(S - 19x)\big) + 102 =$
$= 20x + 0{,}02\big(20S - x(1 + \cdots + 19)\big) + 102 = 20x + 0{,}02(20S -$
$190x) + 102 = 20x + 0{,}4S - 3{,}8x + 102 = 16{,}2x + 0{,}4S + 102$

II. Вычисления

Т.к. $S = 300$ и $S - 20x = 100$, то $x = 10 =>$
$c_1 + \cdots + c_{21} = 16{,}2x + 0{,}4S + 102 = 16{,}2 \cdot 10 + 0{,}4 \cdot 300 + 102 =$
$162 + 120 + 102 = 384$

Таким образом, общая сумма выплат после полного погашения кредита равна 384000 рублей.

Ответ: 384000.

20. 15-го января в банке был взят кредит на 1 миллион рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите величину последней выплаты, если общая сумма выплат составила 1231 тысячи рублей.

Дано:

$S = 1$ млн руб.

$p = 3\% = \frac{3}{100}$

$n = 11$ месяцев

$c_1 + \cdots + c_{11} = 1{,}231$ млн руб.

x – фиксированный платеж

$c_{11} - ?$

Решение:

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}03S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}03S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}03(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}03(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}03(S - 2x)$	

	07.04	$S-3x$	$x + 0{,}03(S-2x)$
	15.04	$S-3x$	
	…		
10	01.11	$1{,}03(S-9x)$	
	07.11	$S-10x$	$x + 0{,}03(S-9x)$
	15.11	$S-10x$	
11	01.12	$1{,}03(S-10x)$	
	07.12	0	$1{,}03(S-10x)$
	15.12	0	

Составим выражение и упростим:

$c_1+\cdots+c_{11}=(x+0{,}03S)+\cdots+\big(x+0{,}03(S-9x)\big)+1{,}03(S-10x)=10x+0{,}03\big(10S-x(1+\cdots+9)\big)+1{,}03(S-10x)=10x+0{,}03(10S-45x)+1{,}03(S-10x)=10x+0{,}3S-1{,}35x+1{,}03S-10{,}3x=1{,}33S-1{,}65x$

II. Вычисления

Т.к. $S=1$ и $c_1+\cdots+c_{11}=1{,}231$, то

$1{,}33\cdot 1-1{,}65\cdot x=1{,}231 => 1{,}65x=0{,}099 => x=0{,}06$

$c_{11}=1{,}03(S-10x), x=0{,}06, S=1 => c_{11}=1{,}03(1-10\cdot 0{,}06)=0{,}412$

Таким образом, величина последней выплаты равна 0,412 млн руб. или 412000 рублей.

Ответ: 412000.

21. 15-го января в банке был взят кредит на 1000000 рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

- к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если общая сумма выплат после его полного погашения составила 1378000 рублей.

Дано:
$S = 1000$ тыс. руб.
$p = r\% = \frac{r}{100}$
$n+1$ – количество месяцев
15 числа n-го мес. долг = 200 тыс. руб.
$c_1 + \dots + c_{n+1} = 1378$ тыс. руб.
$x = 40$ тыс. руб.

$r-?$

Решение:
Пусть $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*), \frac{r}{100} = k - 1$
Пусть платежи выплачиваются 7 числа
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	kS	
	07.02	$S-x$	$x+(k-1)S$
	15.02	$S-x$	
2	01.03	$k(S-x)$	
	07.03	$S-2x$	$x + (k-1)(S-x)$
	15.03	$S-2x$	
3	01.04	$k(S-2x)$	
	07.04	$S-3x$	$x+(k-1)(S-2x)$
	15.04	$S-3x$	
	…		
n	01	$k(S-(n-1)x)$	
	07	$S-nx$	$x+(k-1)(S-(n-1)x)$
	15	$S-nx = 200$	
$n+1$	01	$200k$	
	07	0	$200k$
	15	0	

Т.к. $S = 1000, x = 40, S - nx = 200 =>$
$=> 1000 - 40n = 200 => n = 20$
Тогда последние два месяца в таблице будут выглядеть следующим образом:

20	01.09	$k(S-19x)$	
	07.09	$S-20x$	$x+(k-1)(S-19x)$
	15.09	200	
21	01.10	$200k$	

	07.10	0	$200k$
	15.10	0	

Составим выражение и упростим:

$c_1 + \dots + c_{21} = (x + (k-1)S) + \dots + \big(x + (k-1)(S - 19x)\big) + 200k = 20x + (k-1)\big(20S - x(1 + \dots + 19)\big) + 200k = 20x + (k-1)(20S - 190x) + 200k = 20x + 20kS - 20S - 190kx + 190x + 200k = 210x + k(20S - 190x + 200) - 20S$

II. Вычисления

Т.к. $S = 1000, x = 40$ и $c_1 + \dots + c_{21} = 1378$, то

$210 \cdot 40 + k(20 \cdot 1000 - 190 \cdot 40 + 200) - 20 \cdot 1000 = 1378 =>$

$=> 12600k = 12978 => k = 1{,}03$

Т.к. $k = 1 + \frac{r}{100}$, то $1 + \frac{r}{100} = 1{,}03 => \frac{r}{100} = \frac{3}{100} => r = 3$

Таким образом, долг увеличивался на 3%.

Ответ: 3.

22. 15-го января в банке был взят кредит на некоторую сумму на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 15-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- 15-го числа 15-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

- к 15-му числу 16-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какая сумма была взята в кредит, если общая сумма выплат после его полного погашения составила 612 тысяч рублей?

Дано:
S – сумма кредита
$p = 2\% = \frac{1}{50}$
$n = 16$ месяцев
$c_1 + \cdots + c_{16} = 612$ тыс. руб.
15.04 долг = 200 тыс. руб.
x – фиксированный платеж

$S-?$

Решение:
Пусть платежи выплачиваются 7 числа
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}02S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}02(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}02(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}02(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}02(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	…		
15	01.04	$1{,}02(S - 14x)$	
	07.04	$S - 15x$	$x + 0{,}02(S - 14x)$
	15.04	$S - 15x = 200$	
16	01.05	$1{,}02 \cdot 200 = 204$	
	07.05	0	204
	15.05	0	

Составим выражение и упростим:

$$c_1 + \cdots + c_{16} = (x + 0{,}02S) + \cdots + \big(x + 0{,}02(S - 14x)\big) + 204 = \\ = 15x + 0{,}02\big(15S - x(1 + \cdots + 14)\big) + 204 = 15x + 0{,}02(15S - 105x) + 204 = 15x + 0{,}3S - 2{,}1x + 204 = 12{,}9x + 0{,}3S + 204$$

II. Вычисления

Т.к. $S - 15x = 200$, то $x = \frac{S-200}{15}$ и $c_1 + \cdots + c_{16} = 612 =>$

$12{,}9 \cdot \frac{S-200}{15} + 0{,}3S + 204 = 612 => 1{,}16S = 580 => S = 500$

Таким образом, 500 тыс. руб. или 500000 рублей было взято в кредит.

Ответ: 500000.

23. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 30-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1503 тысячи рублей?

Дано:

$S = 1100$ тыс. руб.

$p = 2\% = \frac{1}{50}$

$n = 31$ месяц

$c_1 + \dots + c_{31} = 1503$ тыс. руб.

x – фиксированный платеж

долг 15.06 – ?

Решение:

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.12	S	
1	01.01	$1{,}02S$	
	07.01	$S - x$	$x + 0{,}02S$
	15.01	$S - x$	
2	01.02	$1{,}02(S - x)$	
	07.02	$S - 2x$	$x + 0{,}02(S - x)$
	15.02	$S - 2x$	
3	01.03	$1{,}02(S - 2x)$	
	07.03	$S - 3x$	$x + 0{,}02(S - 2x)$
	15.03	$S - 3x$	
	…		
30	01.06	$1{,}02(S - 29x)$	
	07.06	$S - 30x$	$x + 0{,}02(S - 29x)$
	15.06	$S - 30x$	
31	01.07	$1{,}02(S - 30x)$	
	07.07	0	$1{,}02(S - 30x)$
	15.07	0	

Составим выражение и упростим:
$c_1 + \dots + c_{31} = (x + 0{,}02S) + \dots + \left(x + 0{,}02(S - 29x)\right) + \left(1{,}02(S - 30x)\right) = \ 30x + 0{,}02\left(30S - x(1 + \dots + 29)\right) + \left(1{,}02(S - 30x)\right) = 30x + 0{,}02(30S - 435x) + \left(1{,}02(S - 30x)\right) = 30x + 0{,}6S - 8{,}7x + 1{,}02S - 30{,}6x = 1{,}62S - 9{,}3x$
II. Вычисления
Т.к. $c_1 + \dots + c_{31} = 1503, S = 1100$, то
$1{,}62 \cdot 1100 - 9{,}3x = 1503 => x = 30$
Долг 15.06 из таблицы находим по формуле $S - 30x$.
Т.к. $S = 1100, x = 30$, то
$\mathrm{S} - 30x = 1100 - 30 \cdot 30 = 200.$
Таким образом, 15-го числа 30-го месяца долг составит 200 тыс. руб. или 200000 рублей.
Ответ: 200000.

24. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какой долг будет 15-го числа 10-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1198 тысячи рублей?

Дано:
S – сумма кредита
$p = 3\% = \frac{3}{100}$
$n = 11$ месяцев
$c_1 + \cdots + c_{11} = 1198$ тыс. руб.
$x = 80$ тыс. руб.

долг 15.10 – ?

Решение:
Пусть платежи выплачиваются 7 числа
I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.12	S	
1	01.01	$1{,}03S$	
	07.01	$S - x$	$x + 0{,}03S$
	15.01	$S - x$	
2	01.02	$1{,}03(S - x)$	
	07.02	$S - 2x$	$x + 0{,}03(S - x)$
	15.02	$S - 2x$	
3	01.03	$1{,}03(S - 2x)$	
	07.03	$S - 3x$	$x + 0{,}03(S - 2x)$
	15.03	$S - 3x$	
	…		
10	01.10	$1{,}03(S - 9x)$	
	07.10	$S - 10x$	$x + 0{,}03(S - 9x)$
	15.10	$S - 10x$	
11	01.11	$1{,}03(S - 10x)$	
	07.11	0	$1{,}03(S - 10x)$
	15.11	0	

Составим выражение и упростим:

$c_1 + \cdots + c_{11} = (x + 0{,}03S) + \cdots + \big(x + 0{,}03(S - 9x)\big) + \big(1{,}03(S - 10x)\big) = 10x + 0{,}03\big(10S - x(1 + \cdots + 9)\big) + \big(1{,}03(S - 10x)\big) = 10x + 0{,}03(10S - 45x) + \big(1{,}03(S - 10x)\big) = 10x + 0{,}3S - 1{,}35x + 1{,}03S - 10{,}3x = 1{,}33S - 1{,}65x$

II. Вычисления

Т.к. $c_1 + \cdots + c_{11} = 1198, x = 80$, то

$1{,}33 \cdot S - 1{,}65 \cdot 80 = 1198 \Rightarrow S = 1000$

Долг 15.10 из таблицы находим по формуле $S - 10x$.

Т.к. $S = 1000, x = 80$, то

$S - 10x = 1000 - 10 \cdot 80 = 200$.

Таким образом, 15-го числа 10-го месяца долг составит 200 тыс. руб. или 200000 рублей.

Ответ: 200000.

25. 15-го марта планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1924 тысячи рублей?

Дано:

S – сумма кредита

$p = 3\% = \frac{3}{100}$

$n = 26$ месяцев

$c_1 + \cdots + c_{26} = 1924$ тыс. руб.

$x = 40$ тыс. руб.

$S-?$

Решение:

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.03	S	
1	01.04	$1{,}03S$	
	07.04	$S - x$	$x + 0{,}03S$
	15.04	$S - x$	
2	01.05	$1{,}03(S - x)$	
	07.05	$S - 2x$	$x + 0{,}03(S - x)$
	15.05	$S - 2x$	
3	01.06	$1{,}03(S - 2x)$	
	07.06	$S - 3x$	$x + 0{,}03(S - 2x)$
	15.06	$S - 3x$	
	…		
25	01.04	$1{,}03(S - 24x)$	
	07.04	$S - 25x$	$x + 0{,}03(S - 24x)$
	15.04	$S - 25x$	
26	01.05	$1{,}03(S - 25x)$	
	07.05	0	$1{,}03(S - 25x)$
	15.05	0	

Составим выражение и упростим:

$c_1 + \cdots + c_{26} = (x + 0{,}03S) + \cdots + \big(x + 0{,}03(S - 24x)\big) + \big(1{,}03(S - 25x)\big) = 25x + 0{,}03\big(25S - x(1 + \cdots + 24)\big) + \big(1{,}03(S -$

$25x)\big) = 25x + 0{,}03(25S - 300x) + \big(1{,}03(S - 25x)\big) = 25x + 0{,}75S - 9x + 1{,}03S - 25{,}75x = 1{,}78S - 9{,}75x$

II. Вычисления

Т.к. $c_1 + \dots + c_{26} = 1924, x = 40$, то

$1{,}78 \cdot S - 9{,}75 \cdot 40 = 1924 \Rightarrow S = 1300$

Таким образом, 1300 тыс. руб. или 1300000 рублей планируется взять в кредит.

Ответ: 1300000.

26. 15-го января в банке был взят кредит на 600 тысяч рублей на $(n + 1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

- к 15-му числу $(n + 1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если общая сумма выплат после погашения кредита составила 852 тысячи рублей.

Дано:

$S = 600$ тыс. руб.

$p = 3\% = \frac{3}{100}$

$n + 1$ – количество месяцев

15 числа n-го мес. долг = 200 тыс. руб.

$c_1 + \dots + c_{n+1} = 852$ тыс. руб.

x – фиксированный платеж

Решение:

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}03S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}03S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}03(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}03(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}03(S - 2x)$	

$n-?$

	07.04	$S-3x$	$x+0{,}03(S-2x)$
	15.04	$S-3x$	
	…		
n	01	$1{,}03(S-(n-1)x)$	
	07	$S-nx$	$x+0{,}03(S-(n-1)x)$
	15	$S-nx=200$	
$n+1$	01	$1{,}03\cdot 200=206$	
	07	0	206
	15	0	

Т.к. $S=600, S-nx=200 => 600-nx=200 =>$

$=> nx=400 => x=\frac{400}{n}$

Составим выражение и упростим:

$c_1+\cdots+c_{n+1}=(x+0{,}03S)+\cdots+\left(x+0{,}03(S-(n-1)x)\right)+206=nx+0{,}03\left(nS-x\left(1+\cdots+(n-1)\right)\right)+206=nx+0{,}03nS-0{,}03x\cdot\frac{n(n-1)}{2}+206$

II. Вычисления

Т.к. $S=600, x=\frac{400}{n}$ и $c_1+\cdots+c_{n+1}=852$, то

$n\cdot\frac{400}{n}+0{,}03n\cdot 600-0{,}03\cdot\frac{400}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+206=852 => 400+18n-6(n-1)=646 => 18n-6n+6=246 => 12n=240 => n=20$

Таким образом, кредит был взят на 21 месяц, а $n=20$.

Ответ: 20.

27. 15-го января в банке был взят кредит на 1100 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите размер 17-го платежа по кредиту, если общая сумма выплат равна 1503 тысячи рублей.

Дано:

$S = 1100$ тыс. руб.

$p = 2\% = \frac{1}{50}$

$n = 31$ месяц

$c_1 + \cdots + c_{31} = 1503$ тыс. руб.

x – фиксированный платеж

c_{17}–?

Решение:

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.01	S	
1	01.02	$1{,}02S$	
	07.02	$S - x$	$x + 0{,}02S$
	15.02	$S - x$	
2	01.03	$1{,}02(S - x)$	
	07.03	$S - 2x$	$x + 0{,}02(S - x)$
	15.03	$S - 2x$	
3	01.04	$1{,}02(S - 2x)$	
	07.04	$S - 3x$	$x + 0{,}02(S - 2x)$
	15.04	$S - 3x$	
	…		
17	01.06	$1{,}02(S - 16x)$	
	07.06	$S - 17x$	$x + 0{,}02(S - 16x)$
	15.06	$S - 17x$	
	…		
30	01.07	$1{,}02(S - 29x)$	
	07.07	$S - 30x$	$x + 0{,}02(S - 29x)$
	15.07	$S - 30x$	
31	01.08	$1{,}02(S - 30x)$	
	07.08	0	$1{,}02(S - 30x)$
	15.08	0	

Составим выражение и упростим:

$c_1 + \dots + c_{31} = (x + 0{,}02S) + \dots + \big(x + 0{,}02(S - 29x)\big) + \big(1{,}02(S - 30x)\big) = 30x + 0{,}02\big(30S - x(1 + \dots + 29)\big) + \big(1{,}02(S - 30x)\big) = 30x + 0{,}02(30S - 435x) + \big(1{,}02(S - 30x)\big) = 30x + 0{,}6S - 8{,}7x + 1{,}02S - 30{,}6x = 1{,}62S - 9{,}3x$

II. Вычисления

Т.к. $c_1 + \dots + c_{31} = 1503, S = 1100$, то

$1{,}62 \cdot 1100 - 9{,}3 \cdot x = 1503 => x = 30$

Т.к. $c_{17} = x + 0{,}02(S - 16x), S = 1100, x = 30$, то

$c_{17} = 30 + 0{,}02(1100 - 16 \cdot 30) = 42{,}4$.

Таким образом, размер 17-го платежа по кредиту составил 42,4 тыс. руб. или 42400 рублей.

Ответ: 42400.

28. 15-го июня планируется взять кредит в банке на сумму 1300 тысяч рублей на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 15-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

- 15-го числа 15-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;

- к 15-му числу 16-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1636 тысяч рублей.

Дано:

$S = 1300$ тыс. руб.

$p = r\% = \frac{r}{100}$

$n = 16$ месяцев

$c_1 + \dots + c_{16} = 1636$ тыс. руб.

Решение:

Пусть $1 + \frac{r}{100} = k, k > 1 \dots (*), \frac{r}{100} = k - 1$

Пусть платежи выплачиваются 7 числа

I. Строим модель

	Дата	Долг	Платеж
0	15.06	S	

15.04 долг = 100 тыс. руб.
x – фиксированный платеж

r–?

1	01.07	kS	
	07.07	$S-x$	$x+(k-1)S$
	15.07	$S-x$	
2	01.07	$k(S-x)$	
	07.07	$S-2x$	$x+(k-1)(S-x)$
	15.07	$S-2x$	
3	01.04	$k(S-2x)$	
	07.04	$S-3x$	$x+(k-1)(S-2x)$
	15.04	$S-3x$	
	…		
15	01.04	$k(S-14x)$	
	07.04	$S-15x$	$x+(k-1)(S-14x)$
	15.04	$S-15x=100$	
16	01.05	$100k$	
	07.05	0	$100k$
	15.05	0	

Составим выражение и упростим:
$c_1+\dots+c_{16}=(x+(k-1)S)+\dots+\big(x+(k-1)(S-14x)\big)+100k=15x+(k-1)\big(15S-x(1+\dots+14)\big)+100k=15x+(k-1)(15S-105x)+100k=15x+15kS-15S-105kx+105x+100k=120x-15S+k(15S-105x+100)$

II. Вычисления
Т.к. $S-15x=100$ и $S=1300$, то $1300-15x=100 => x=80$
Т.к. $c_1+\dots+c_{16}=1636, S=1300, x=80$, то
$120\cdot 80-15\cdot 1300+k(15\cdot 1300-105\cdot 80+100)=1636 =>$
$=> 11200k=11536 => k=1{,}03$
Т.к. $k=1+\frac{r}{100}$ и $k=1{,}03$, то $1+\frac{r}{100}=1{,}03 => r=3$
Таким образом, долг увеличивался на 3%.
Ответ: 3.

Вклады

1. Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по

сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

Дано:
$S = 10$ млн руб.
$p = 10\% = \frac{1}{10}$
$n = 4$ года
x – фик. вклад, $x \in \mathbb{Z}$ млн руб.
$S_4 \geq 30$ млн руб.

x_{min}–?

Решение:
Пусть вклад открыли в январе, увеличивается в декабре, пополняется в феврале
I. Строим модель

	Дата	Размер вклада	Пополнение
1	январь	S	
	декабрь	$1{,}1S$	
2	декабрь	$1{,}1^2S$	
3	февраль	$1{,}1^2S + x$	x
	декабрь	$1{,}1^3S + 1{,}1x$	
4	февраль	$1{,}1^3S + 1{,}1x + x$	x
	декабрь	$1{,}1^4S + 1{,}1^2x + 1{,}1x$	

Т.к. котором через четыре года вклад должен быть не меньше 30 млн рублей, то составим неравенство:
$1{,}1^4S + 1{,}1^2x + 1{,}1x \geq 30$
II. Вычисления
$1{,}1^4S + 1{,}1^2x + 1{,}1x \geq 30 => 1{,}1^4S + 2{,}31x \geq 30 => x \geq \frac{30-1{,}1^4S}{2{,}31}$
Т.к. $S = 10$, то $x \geq \frac{30-1{,}1^4\cdot 10}{2{,}31} => x \geq \frac{15{,}359}{2{,}31} => x \geq 6\frac{1499}{2310} =>$ $x_{min} = 7$
Таким образом, в начале третьего и четвертого годов вклад надо пополнить на 7 млн рублей.
Ответ: 7.

2. По вкладу «А» банк в конце года планирует увеличивать на 14% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» - увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Дано:	Решение:
S – перв. взнос $p_{А} = 14\% = \frac{7}{50}$ $p_{Б1} = 8\% = \frac{2}{25}$ $p_{Б2} = n\% = \frac{n}{100}, n \in \mathbb{Z}$ $k = 2$ года Вклад Б выгоднее вклада А	I. Строим модель для вклада «А»
n_{min}–?	

Год	Размер вклада
1	S
	$1{,}14S$
2	$1{,}14^2S$

Строим модель для вклада «Б»

Год	Размер вклада
1	S
	$1{,}08S$
2	$1{,}08 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)S$

Т.к. за два года хранения вклад «Б» должен оказаться выгоднее вклада «А», то составим неравенство:

$$1{,}08 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)S > 1{,}14^2S$$

II. Вычисления

$$1{,}08 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)S > 1{,}14^2S => \frac{27}{25} + \frac{27n}{2500} > 1{,}14 \cdot 1{,}14 => 2700 + 27n > 3249 => 27n > 549 => n > 20\frac{1}{3} => n_{min} = 21$$

Таким образом, по вкладу «Б» во второй год банк должен увеличить сумму на 21%.

Ответ: 21.

5. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 15 млн рублей.

Дано:
S – перв. взнос, $S \in \mathbb{Z}$ млн руб.
$p = 10\% = \frac{1}{10}$
$n = 4$ года
$x = 2$ млн руб.
$S_4 < 15$ млн руб.

S_{max}–?

Решение:
I. Строим модель

Год	Размер вклада
1	S
	$1{,}1S$
2	$1{,}1^2S$
3	$1{,}1^2S + x$
	$1{,}1^3S + 1{,}1x$
4	$1{,}1^3S + 1{,}1x + x$
	$1{,}1^4S + 1{,}1^2x + 1{,}1x$

Т.к. через четыре года вклад должен быть меньше 15 млн рублей, то составим неравенство:
$1{,}1^4S + 1{,}1^2x + 1{,}1x < 15$
II. Вычисления
$1{,}1^4S + 1{,}1^2x + 1{,}1x < 15 => 1{,}1^4S + 2{,}31x < 15 => S < \frac{15-2{,}31x}{1{,}1^4}$
Т.к. $x = 2$, то $S < \frac{15-2{,}31\cdot 2}{1{,}1^4} => S < \frac{10{,}38}{1{,}4641} => S < 7\frac{1313}{14641} =>$ $S_{max} = 7$
Таким образом, наибольший размер первоначального вклада составит 7 млн руб.
Ответ: 7.

Задачи для самостоятельной работы

Равные платежи

1. 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?
Ответ: 9282000 рублей.

2. В июле 2020 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:
- в январе каждого года долг увеличивается на 30% по сравнению с предыдущим годом;
- с февраля по июнь нудно выплатить часть долга одним платежом.
Определите, на какую сумму взяли кредит в банке, если известно, что кредит был выплачен тремя равными платежами (за 3 года) и общая сумма выплат на 78030 рублей больше суммы взятого в кредит.
Ответ: 119700 рублей.

3. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 928200 рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?
Ответ: 1171280 рублей.

4. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9282000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплат кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?
Ответ: 2928200 рублей.

5. В июле планируется взять кредит на сумму 2320500 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Ответ: 254100 рублей.

6. 31 декабря 2014 года Петр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Петр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2592000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4392000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Петр взял деньги в банке.

Ответ: 20%.

7. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет Тимофей может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тысяч рублей?

Ответ: 6 лет.

Разные платежи

1. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн. руб.
Ответ: 11.

2. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке в размере S тыс. рублей, где S – натуральное число, на 3 года. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 17,5% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет составлять целое число тысяч рублей.
Ответ: 400.

3. В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите S, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 836 тысяч рублей.
Ответ: 800.

4. Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 25% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 9 млн рублей.
Ответ: 5.

5. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 долг остается равным S тыс. рублей;
- выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 625 тыс. рублей;
- к июлю 2021 долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.
Ответ: 1925000.

6. Георгий взял кредит в банке на сумму 804000 рублей. Схема выплаты кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 процентов оставшуюся сумму долга, а затем Георгий переводит в банк свой очередной платеж. Известно, что Георгий погасил

кредит за три года, причем каждый его следующий платеж был ровно вдвое меньше предыдущего. Какую сумму Георгий заплатил в третий раз? Ответ дайте в рублях.
Ответ: 133100.

7. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 600000 рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 360000 рублей, а во второй год – 330000 рублей.
Ответ: $r = 10$.

8. 15-го января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,25 млн рублей.
Ответ: 9.

9. В декабре 2018 г. планируется взять кредит в банке на четыре года в размере 3 млн руб. Условия его возврата таковы:
- в январе каждого года долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего года, где r – целое число;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- 1 июля каждого года долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	01.07.2019	01.07.2020	01.07.2021	01.07.2022
Долг (в млн рублей)	2,2	1,4	0,6	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 4,12 млн руб.
Ответ: 16.

10. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 6,6 млн. руб. Условия возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 6,6 млн руб.;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если в 2021 году долг будет выплачен полностью и общие выплаты составят 12,6 млн рублей.
Ответ: 20.

Равномерно уменьшающиеся платежи

1. 15 января планируется взять кредит в банке на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 0,59 млн рублей?
Ответ: 0,5.

2. 15 января планируется взять кредит в банке на 20 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что за первые 10 месяцев нужно выплатить банку 1179 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?
Ответ: 1800000.

3. 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?
Ответ: 119.

4. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть дога;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платеж составит 1,5 млн рублей?
Ответ: 16200000.

5. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть дога;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платеж составит 825 тыс. рублей?
Ответ: 14850000.

6. 15 января планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что на 11-й месяц кредитования нужно выплатить 44,4 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?
Ответ: 932400.

7. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,8 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?
Ответ: 1233000.

8. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму надо вернуть банку за второй год, если за первые 12 месяцев нужно вернуть банку 822 тысячи рублей?
Ответ: 678000.

9. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку в течение первого года кредитования?
Ответ: 411000.

10. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 9%, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

Ответ: 1.

11. 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:
- 1-го числа n-го месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число n-го месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа n-го месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит?

Ответ: 39.

12. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 7,5 млн рублей?

Ответ: 4.

13. 15-го декабря планируется взять кредит на 1200 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 400 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1288 тысяч рублей.
Ответ: 1.

14. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1000000 рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какой долг будет 15-го числа 10-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1231 тысячи рублей?
Ответ: 400000.

15. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 20 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какой долг будет 15-го числа 25-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1407 тысячи рублей?
Ответ: 400000.

16. 15-го мая планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1472 тысячи рублей?
Ответ: 1200000.

17. 15-го июля планируется взять кредит в банке на сумму 1400 тысяч рублей на 31 месяц. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа 30-го месяца долг составит 500 тысяч рублей;
- к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1989 тысяч рублей.

Ответ: 2.

Вклады

1. Вклад в размере 6 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 15 млн рублей.

Ответ: 3.

2. По вкладу «А» банк в конце года планирует увеличивать на 17% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» - увеличивать эту сумму на 9% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Ответ: 26.

II. Задачи на оптимальный выбор
Теоретический материал

Функция – соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу одного множества соответствует единственный элемент другого множества.

Функция вида $y = kx + b$,

где x независимая переменная, k и b – любые действительные числа, называется линейной функцией.

При $k \neq 0$ и $b = 0$ линейная функция принимает вид $y = kx$, то есть является прямой пропорциональностью.

Таким образом, прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции.

Свойства линейной функции:

1. $D(y)$: $(-\infty; +\infty)$.
2. $E(y)$: $(-\infty; +\infty)$.
3. График – прямая.
4. Нули функции: $y = 0$ при $x = -\frac{b}{k}$.
5. Промежутки возрастания, убывания: $y \uparrow$ при $k > 0$, $y \downarrow$ при $k < 0$.
6. Функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.
7. Четность и нечетность функции зависят от значений k и b:

$b \neq 0, k = 0$, значит, $y = b$ – четная;

$b = 0, k \neq 0$, значит, $y = kx$ – нечетная;

$b \neq 0, k \neq 0$, значит, $y = kx + b$ – функция общего вида;

$b = 0, k = 0$, значит, $y = 0$ – как четная, так и нечетная функция.

8. Свойством периодичности линейная функция не обладает, потому что ее спектр не ограничен.
9. График функции пересекается оси координат:

ось абсцисс Ox — в точке $\left(-\frac{b}{k};\ 0\right)$;

ось ординат Oy — в точке $(0;\ b)$.

10. При $k > 0$ функция принимает отрицательные значения на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{b}{k}\right)$ и положительные значения на промежутке $\left(-\frac{b}{k};\ +\infty\right)$.

При $k < 0$ функция принимает отрицательные значения на промежутке $\left(-\frac{b}{k};\ +\infty\right)$ и положительные значения на промежутке $\left(-\infty;\ -\frac{b}{k}\right)$.

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется квадратичной.

Свойства квадратичной функции:

1. $D(y)$: $(-\infty; +\infty)$.

2. $E(y)$: если $a > 0$, то $\left(y\left(-\frac{b}{2a}\right); +\infty\right)$; если $a < 0$, то $\left(-\infty; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

3. График – парабола.

4. Нули функции:

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня x_1 и x_2, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках с координатами $(x_1;\ 0), (x_2;\ 0)$.

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень x_1, то парабола имеет с осью абсцисс единственную общую точку с координатами $(x_1;\ 0)$.

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней, то парабола не имеет с осью абсцисс общих точек.

5. Осью симметрии параболы является прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси ординат. Уравнение оси симметрии $x = -\frac{b}{2a}$. Симметричные части графика называются ветвями параболы. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

6. Свойством периодичности линейная функция не обладает, потому что ее спектр не ограничен.

7. Промежутки возрастания и убывания:

Если $a > 0$, то $y \uparrow$ при $x \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$,

$y \downarrow$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Если $a < 0$, то $y \uparrow$ при $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$,

$y \downarrow$ при $x \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Производная функции – отношение приращения функции к приращению аргумента при бесконечно малом приращении аргумента:

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ при } \Delta x \to 0$$

Базовые производные:

1. $c' = 0, c = const$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot lna$;
4. $(e^n)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{xlna}$;
6. $(lnx)' = \frac{1}{x}$;
7. $(sinx)' = cosx$;
8. $(cosx)' = -sinx$;
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
12. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
13. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$;
15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

Правила дифференцирования

1. Константа выносится за знак производной: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

2. Производная суммы: $(f + y)' = f' + y'$

3. Производная произведения: $(f \cdot y)' = f' \cdot y + f \cdot y'$

4. Производная частного: $\left(\frac{f}{y}\right)' = \frac{f'y - fy'}{y^2}$

5. Производная сложной функции: $[f(y)]' = f'(y) \cdot y'$

Алгоритм нахождения производной от сложной функции

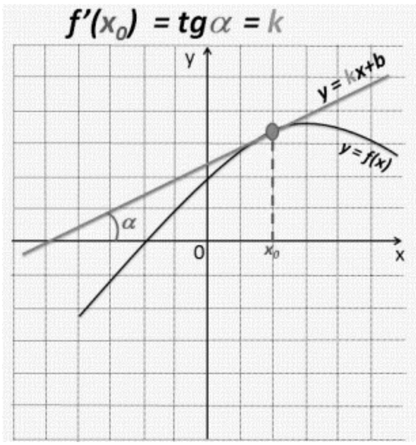
1. Определяем «внутреннюю» функцию, находим ее производную.

2. Определяем «внешнюю» функцию, находим ее производную.

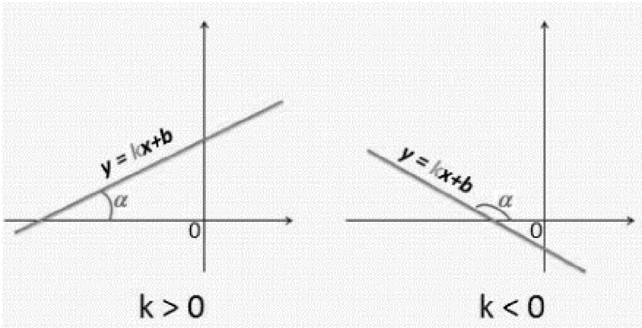
3. Умножаем результаты первого и второго пунктов.

Геометрический смысл производной:

Геометрический смысл производной заключается в следующем: если к графику функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 проведена касательная, непараллельная оси Oy, то значение производной в точке касания есть тангенс угла α, образованного этой касательной с положительным направлением оси абсцисс или угловой коэффициент касательной.



Если угол наклона касательной с положительным направлением оси Ox – острый, прямая направлена вверх, то угловой коэффициент касательной – число положительное. Значит и тангенс данного угла положительный. Если угол наклона касательной с положительным направлением оси Ox – тупой, прямая направлена вниз, то угловой коэффициент касательной – число отрицательное. Значит и тангенс данного угла отрицательный.



Таким образом, чтобы найти значение производной в заданной точке нужно вычислить тангенс угла α. Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Поэтому надо рассмотреть такой прямоугольный треугольник, в котором есть данный угол и вычислить соответствующее отношение.

Данный треугольник выбирается не единственным образом. Если провести прямые, параллельные оси Ox, то касательная будет образовывать с ними равные углы, так как это соответственные углы при параллельных прямых.

Физический смысл производной:

Если $s = s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t: $v(t) = s'(t)$.

На практике во многих отраслях науки используется обобщение полученного равенства: если некоторый процесс протекает по закону $S = S(t)$, то производная $S'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t.

Точками экстремума функции $f(x)$ называются точки максимума или минимума этой функции.

Точка максимума – это точка, в которой функция меняет свою монотонность, промежуток возрастания сменяется промежутком убывания.

Точка минимума – это точка, в которой функция меняет свою монотонность, промежуток убывания сменяется промежутком возрастания.

Алгоритм нахождение точек экстремума:

1. Находим производную функции и приравниваем к нулю.
2. Находим точки, в которых производная равна нулю.
3. Отмечаем корни производной на числовой прямой, а также определяем ее знаки на получившихся интервалах.
4. Если производная меняет в найденной точке знак с «$+$» на «$-$», то эта точка – точка максимума. Если производная меняет в найденной точке знак с «$-$» на «$+$», то эта точка – точка минимума.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1. Найти область определения функции $D(f)$.
2. Найти производную $f‘(x)$.
3. Найти стационарные и критические точки функции, принадлежащие интервалу $(a;\ b)$.
4. Найти $f(a)$, $f(b)$ и значения функции в стационарных точках, принадлежащих интервалу $(a;\ b)$.
5. Среди полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Классификация задач

Задачи на оптимальный выбор содержат следующие подтипы (сюжеты):

- ценные бумаги;
- пенсионный фонд;
- владелец завода;
- области;
- шахты;
- комбинаты;
- прибыль.

Методы решения задач на оптимальный выбор

Задачи на оптимальный выбор – это задачи, которые описывают разнообразные ситуации, с которыми граждане, предприятия и компании могут встретиться в своей экономической деятельности.

Задачи на оптимизацию – это уже настоящие исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать своего подхода. Успех в решении таких задач заключается в систематической тренировке.

Решение задач на оптимальный выбор можно разбить на следующие этапы:

1. составление математической модели/функции;
2. задание ограничений;
3. исследование математической модели, используя свойства функции или производную;
4. анализ, запись ответа.

Для решения задач на оптимальный выбор требуется умение искать наибольшие и наименьшие значения функции, умение искать производные и исследовать функции на экстремумы. Следует знать, что такое ограниченные, возрастающие и убывающие функции.

Основной подход к решению задач на оптимальный выбор заключается в следующем: необходимо составить функцию, задающую нужную зависимость – если нужно найти максимальную или минимальную прибыль, значит это должна быть функция, описывающая прибыль, если нужен максимальный выпуск продукции на заводе, значит функция должна задавать количество продукции, выпускаемой заводом, нужно найти оптимальное расстояние – наша функция будет описывать расстояние.

Рассмотрим различные сюжеты задач на оптимальный выбор на примерах с решениями.

Примеры решения задач на оптимальный выбор

1. Алексей приобрел ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Дано:
$S = 7$ тыс. руб.
$p = 10\% = \frac{1}{10}$
n – количество лет
$x = 2$ тыс. руб.

n_{min} –?

Решение:
I. Строим модель

Год	Цена бумаги	Сумма на счете
0	S	
1	$S + x$	$1{,}1S$
2	$S + 2x$	$1{,}1(S + x)$
3	$S + 3x$	$1{,}1(S + 2x)$
	…	
n	$S + nx$	$1{,}1(S + (n - 1)x)$

Т.к. сумма на банковском счете будет наибольшей, если продать бумагу в течение того года, когда сумма на счете превысит цену бумаги, то составим неравенство:

$1{,}1(S + (n - 1)x) > S + nx$

II. Вычисления

$1{,}1(S + (n - 1)x) > S + nx => 1{,}1S + 1{,}1nx - 1{,}1x - S - nx > 0 => 0{,}1S + 0{,}1nx - 1{,}1x > 0 => n > \frac{1{,}1x - 0{,}1S}{0{,}1x}$

Т.к. $x = 2, S = 7$, то $n > \frac{1{,}1 \cdot 2 - 0{,}1 \cdot 7}{0{,}1 \cdot 2} => n > \frac{1{,}5}{0{,}2} => n > 7{,}5 => n_{min} = 8$

Таким образом, в течение 8 года после покупки следует продать ценную бумагу.

Ответ: 8.

2. В начале 2001 года Алексей приобрел ценную бумагу за 11000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 4000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год

сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Дано:
$S = 11000$ руб.
$p = 10\% = \frac{1}{10}$
n – количество лет
$x = 4000$ руб.

Год – ?

Решение:
I. Строим модель

	Год	Цена бумаги	Сумма на счете
1	2001	S	
		$S+x$	$1{,}1S$
2	2002	$S+2x$	$1{,}1(S+x)$
3	2003	$S+3x$	$1{,}1(S+2x)$
		…	
n	?	$S+nx$	$1{,}1(S+(n-1)x)$

Т.к. сумма на банковском счете будет наибольшей, если продать бумагу в начале того года, когда сумма на счете превысит цену бумаги, то составим неравенство:

$1{,}1(S+(n-1)x) > S+nx$

II. Вычисления

$1{,}1(S+(n-1)x) > S+nx \Rightarrow 1{,}1S+1{,}1nx-1{,}1x-S-nx > 0 \Rightarrow 0{,}1S+0{,}1nx-1{,}1x > 0 \Rightarrow n > \frac{1{,}1x-0{,}1S}{0{,}1x}$

Т.к. $x = 4000, S = 11000$, то $n > \frac{1{,}1\cdot 4000-0{,}1\cdot 11000}{0{,}1\cdot 4000} \Rightarrow n > \frac{3300}{400} \Rightarrow n > 8{,}25 \Rightarrow n_{min} = 9 \Rightarrow$ в начале 2009 года следует продать ценную бумагу.

Ответ: 2009.

3. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t $(t = 1, 2, \dots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1+r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в

конце двадцать первого года. При каких положительных значениях r это возможно?

I. Строим модель

В случае продажи пенсионным фондом ценных бумаг в конце года t в конце 25-го года на его счёте будет: $S = t^2(1+r)^{25-t}$ тыс. руб. $S = S(t)$.

Найдем производную функции $S(t)$, $(1+r)$ считаем числом:

$S'(t) = 2t(1+r)^{25-t} + t^2(1+r)^{25-t} \cdot \ln(1+r) \cdot (-1) =$

$= t(1+r)^{25-t}(2 - t \cdot \ln(1+r))$

$S'(t) = 0 => t(1+r)^{25-t}(2 - t \cdot \ln(1+r)) = 0$

$t \neq 0$ по условию задачи, $(1+r)^{25-t} \neq 0$ по свойству функции, тогда

$2 - t \cdot \ln(1+r) = 0 => t = \frac{2}{\ln(1+r)}$

Если $t < \frac{2}{\ln(1+r)}$, то $-t\ln(1+r) > -2 => 2 - t\ln(1+r) > 0$.

Если $t > \frac{2}{\ln(1+r)}$, то $-t\ln(1+r) < -2 => 2 - t\ln(1+r) < 0$.

Таким образом $t = \frac{2}{\ln(1+r)}$ – точка максимума.

По условию задачи продавать бумаги следует в конце 21-го года, тогда доход, полученный при продаже бумаг в конце 21-го года, больше, чем при их продаже в конце 20-го и 22-го года. Согласно монотонности функции, $S(t)$: $S(21) > S(20)$ и $S(21) > S(22)$, что гарантирует выполнение условия $S(21) > S(t)$ для всех t, отличных от 21. Необходимо и достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} S(21) > S(20) \\ S(21) > S(22) \end{cases} => \begin{cases} 21^2(1+r)^{25-21} > 20^2(1+r)^{25-20} \\ 21^2(1+r)^{25-21} > 22^2(1+r)^{25-22} \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 21^2(1+r)^{25-21} > 20^2(1+r)^{25-20} \\ 21^2(1+r)^{25-21} > 22^2(1+r)^{25-22} \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} 441(1+r)^4 > 400(1+r)^5 \\ 441(1+r)^4 > 484(1+r)^3 \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} \frac{441}{400} > 1 + r \\ 1 + r > \frac{484}{441} \end{cases} => \begin{cases} r < \frac{41}{400} \\ r > \frac{43}{441} \end{cases} => r \in \left(\frac{43}{441}; \frac{41}{400}\right)$$

Ответ: $r \in \left(\frac{43}{441}; \frac{41}{400}\right)$.

4. Пенсионный фонд владеет акциями, цена которых к концу года t становится равной t^2 тыс. руб. (т.е. к концу первого года они стоят 1 тыс. руб., к концу второго – 4 тыс. руб. и т.д.), в течение 20 лет. В конце любого года можно продать акции по их рыночной цене на конец года и положить вырученные деньги в банк под 25% годовых. В конце какого года нужно продать акции, чтобы прибыль была максимальной?

I. Строим модель

Т.к. t^2 тыс. руб. – стоимость акций в конце года t, то в следующем году $(t+1)$ – стоимость акций составит $(t+1)^2$ тыс. руб., тогда прибыль конца последующего года по сравнению с концом предыдущего будет равна $(t+1)^2 - t^2$. Найдем эту прибыль в процентах и введем функцию:

$$t^2 - 100\%$$
$$((t+1)^2 - t^2) - f$$

По свойству пропорции $f = \frac{(t+1)^2 - t^2}{t^2} \cdot 100\%$.

Для исследования упростим функцию:

$f = \frac{(t+1)^2 - t^2}{t^2} \cdot 100\% => \frac{2t+1}{t^2} \cdot 100\%$.

Найдем производную:

$f' = \frac{2t^2 - (2t+1) \cdot 2t}{t^4} \cdot 100\% = \frac{-2t-2}{t^3} \cdot 100\%$

$f' = 0 => \frac{-2t-2}{t^3} \cdot 100\% = 0 => \frac{-2t-2}{t^3} = 0 => \left[\begin{matrix} t = -1 \\ t \neq 0 \end{matrix}\right.$

По условию задачи $t \geq 1$, проверим знак производной на этом промежутке (возьмем $t = 2$):

$f'(2) = \frac{-2\cdot2-2}{2^3}\cdot 100\% = -75$, тогда функция является убывающей, поэтому прибыль в процентах в акциях с каждым годом становится меньше.

Определим, когда прибыль в акциях станет меньше 25%, для этого составим неравенство:

$\frac{2t+1}{t^2}\cdot 100\% < 25\%$

II. Вычисления

$\frac{2t+1}{t^2}\cdot 100\% < 25\% => \frac{2t+1}{t^2} < \frac{1}{4} => \frac{t^2-8t-4}{4t^2} > 0 =>$

$$=> \left[\begin{array}{l} t < 4-\sqrt{20} - \text{не удов. усл. задачи } \left(4-\sqrt{20} < 0\right) \\ \qquad\qquad t > 4+\sqrt{20} \end{array}\right. =>$$

$=> t > 4+\sqrt{20}$

Т.к. $4 < \sqrt{20} < 5 => 8 < 4+\sqrt{20} < 9$, то акции надо продать в конце 9-го года.

Ответ: 9.

5. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара, а, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

I. Строим модель

Григорий готов заплатить за $t = \frac{5000000}{500} = 10000$ часов работы.

Пусть x^2 часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, где $x^2 \in [0; 10000]$; $0 \le x \le 100$, y^2 часов – во втором городе, где $y^2 \in [0; 10000]$; $0 \le y \le 100$.
Тогда общее время работы на двух заводах будет: $x^2 + y^2 = 10000$.
При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят $3x$ единиц товара, во втором – $4y$ единиц товара.
Пусть z – общее количество единиц произведенного товара.

Завод	Производительность		Время		Оплата за час	Оплата за неделю
1	$3x$	z	x^2	10000	500	5000000
2	$4y$		y^2		500	

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4y = z \\ x^2 + y^2 = 10000 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 3x + 4y = z \\ x^2 + y^2 = 10000 \end{cases} => \begin{cases} z = 3x + 4y \\ y = \sqrt{10000 - x^2} \end{cases} =>$$

$$=> z = 3x + 4\sqrt{10000 - x^2}$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $x \in [0; 100]$
Найдем производную функции z:

$$z' = 3 + 4 \cdot \frac{1}{2}(10000 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = 3 - \frac{4x}{\sqrt{10000 - x^2}} =$$

$$= \frac{3\sqrt{10000 - x^2} - 4x}{\sqrt{10000 - x^2}}$$

$$z' = 0 => \frac{3\sqrt{10000 - x^2} - 4x}{\sqrt{10000 - x^2}} = 0 => \left[\begin{array}{l} x = \pm 60 \\ x \ne \pm 100 \end{array}\right.$$

По условию задачи $x \ne -60$. Проверим значение производной на промежутках $0 \le x < 60; 60 < x \le 100$.
Если $0 \le x < 60$, то $z' > 0$, если $60 < x \le 100$, то $z' < 0 =>$
$=> x = 60$ – точка максимума, значит
$z_{\text{наиб}} = z(60) = 3 \cdot 60 + 4\sqrt{10000 - 60^2} = 500$.
Таким образом, наибольшее количество товаров – 500.
Ответ: 500.

6. Геннадий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Геннадий платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 рублей. Геннадий готов выделять 900000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

I. Строим модель

Пусть x^2 часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, тогда оплата труда суммарно составит $250x^2$ рублей, y^2 часов – во втором городе, тогда оплата труда суммарно составит $200y^2$ рублей.

Общая оплата труда с двух заводов: $250x^2 + 200y^2 = 900000.$

При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят x единиц товара, во втором – y единиц товара.

Пусть z – общее количество единиц произведенного товара.

<table>
<tr><th>Завод</th><th colspan="2">Производительность</th><th>Время</th><th>Оплата за час</th><th>Оплата за неделю</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">z</td><td>x^2</td><td>250</td><td rowspan="2">900000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>y</td><td>y^2</td><td>200</td></tr>
</table>

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = z \\ 250x^2 + 200y^2 = 900000 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} x + y = z \\ 250x^2 + 200y^2 = 900000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x + y \\ y = \sqrt{\frac{900000 - 250x^2}{200}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$= \text{Ю} z = x + \sqrt{\frac{900000 - 250x^2}{200}}$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$.

Найдем производную функции z:

$$z' = 1 + \frac{1}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}(900000 - 250x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-500x) =$$

$$= 1 - \frac{25x}{\sqrt{1800000 - 500x^2}} = 1 - \frac{5x}{2\sqrt{18000 - 5x^2}} = \frac{2\sqrt{18000 - 5x^2} - 5x}{2\sqrt{18000 - 5x^2}}$$

$$z' = 0 => \frac{2\sqrt{18000 - 5x^2} - 5x}{2\sqrt{18000 - 5x^2}} = 0 => \left[\begin{array}{l} x = \pm 40 \\ x \neq \pm 60 \end{array}\right.$$

По условию задачи $x \neq -40$. Проверим значение производной на промежутках $0 \leq x < 40; x > 40$.

Если $0 \leq x < 40$, то $z' > 0$, если $x > 40$, то $z' < 0$, тогда $x = 40$ – точка максимума, значит

$$z_{\text{наиб}} = z(40) = 40 + \sqrt{\frac{900000 - 250 \cdot 40^2}{200}} = 90.$$

Таким образом, наибольшее количество товаров – 90.

Ответ: 90.

7. Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 рублей. Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

I. Строим модель

Пусть x^2 часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, тогда оплата труда суммарно составит $500x^2$ рублей, y^2 часов – во втором городе, тогда оплата труда суммарно составит $200y^2$ рублей.

Пусть z – сумма еженедельной оплаты труда.

Тогда общая оплата труда с двух заводов: $500x^2 + 200y^2 = z$.

При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят x единиц товара, во втором – y единиц товара.

<table>
<tr><th>Завод</th><th colspan="2">Производительность</th><th>Время</th><th>Оплата за час</th><th>Оплата за неделю</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">70</td><td>x^2</td><td>500</td><td rowspan="2">z</td></tr>
<tr><td>2</td><td>y</td><td>y^2</td><td>200</td></tr>
</table>

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 500x^2 + 200y^2 = z \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 500x^2 + 200y^2 = z \end{cases} => \begin{cases} y = 70 - x \\ z = 500x^2 + 200y^2 \end{cases} =>$$

$$=> z = 500x^2 + 200(70 - x)^2 =>$$

$$z = 700x^2 - 28000x + 980000$$

Требуется найти $z_{\text{наим}}$.

Найдем производную функции z:

$$z' = 1400x - 28000$$

$$z' = 0 => 1400x - 28000 = 0 => x = 20$$

Проверим значение производной на промежутках

$0 \leq x < 20; x > 20$.

Если $0 \leq x < 20$, то $z' < 0$, если $x > 20$, то $z' > 0$, тогда

$x = 20$ – точка минимума, значит

$$z_{\text{наим}} = z(20) = 700 \cdot 20^2 - 28000 \cdot 20 + 980000 = 700000.$$

Таким образом, наименьшая сумма, которую придется тратить еженедельно составит 700000 рублей.

Ответ: 700000.

8. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара, а, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся

суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

I. Строим модель

Пусть x^2 часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, тогда оплата труда суммарно составит $500x^2$ рублей, y^2 часов – во втором городе, тогда оплата труда суммарно составит $500y^2$ рублей.

Пусть z – сумма еженедельной оплаты труда.

Тогда общая оплата труда с двух заводов: $500x^2 + 500y^2 = z$.

При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят $2x$ единиц товара, во втором – $5y$ единиц товара.

<table>
<tr><td>Завод</td><td colspan="2">Производительность</td><td>Время</td><td>Оплата за час</td><td>Оплата за неделю</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$2x$</td><td rowspan="2">580</td><td>x^2</td><td>500</td><td rowspan="2">z</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$5y$</td><td>y^2</td><td>500</td></tr>
</table>

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 580 \\ 500x^2 + 500y^2 = z \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 2x + 5y = 580 \\ 500x^2 + 500y^2 = z \end{cases} => \begin{cases} y = \frac{580-2x}{5} \\ z = 500x^2 + 500y^2 \end{cases} =>$$

$$=> z = 500x^2 + 500\left(\frac{580-2x}{5}\right)^2 =>$$

$$z = 580x^2 - 46400x + 6728000$$

Требуется найти $z_{\text{наим}}$.

Найдем производную функции z:

$z' = 1160x - 46400$

$z' = 0 => 1160x - 46400 = 0 => x = 40$

Проверим значение производной на промежутках

$0 \leq x < 40; x > 40$.

Если $0 \le x < 40$, то $z' < 0$, если $x > 40$, то $z' > 0$, тогда
$x = 40$ – точка минимума, значит
$z_{\text{наим}} = z(40) = 580 \cdot 40^2 - 46400 \cdot 40 + 6728000 = 5800000.$
Таким образом, наименьшая сумма, которую придется тратить еженедельно составит 5800000 рублей.
Ответ: 5800000.

9. Макар является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $36t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Макар платит рабочему 200 рублей. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 70 изделий. Какую наименьшую сумму (в млн рублей) придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?
I. Строим модель
Пусть $36x^3$ часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, тогда оплата труда суммарно $200 \cdot 36x^3 = 7200x^3$ рублей, y^3 часов – во втором городе, тогда оплата труда суммарно составит $200y^3$ рублей.
Пусть z – сумма еженедельной оплаты труда.
Тогда общая оплата труда с двух заводов: $7200x^3 + 200y^3 = z.$
При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят x единиц товара, во втором – y единиц товара.

Завод	Производительность		Время	Оплата за час	Оплата за неделю
1	x	70	$36x^3$	200	z
2	y		y^3	200	

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 7200x^3 + 200y^3 = z \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 7200x^3 + 200y^3 = z \end{cases} => \begin{cases} y = 70 - x \\ z = 7200x^3 + 200y^3 \end{cases} =>$$

$$=> z = 7200x^3 + 200(70 - x)^3 =>$$

$$=> z = 7000x^3 + 42000x^2 - 2940000x + 68600000$$

Требуется найти $z_{\text{наим}}$.

Найдем производную функции z:

$$z' = 21000x^2 + 84000x - 2940000$$

$$z' = 0 => 21000x^2 + 84000x - 2940000 = 0 =>$$

$$=> x^2 + 4x - 140 = 0 =>$$

$$=> \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -14 - \text{не удов. усл. задачи} \end{array}\right. => x = 10$$

Проверим значение производной на промежутках $0 \leq x < 10; x > 10$.

Если $0 \leq x < 10$, то $z' < 0$, если $x > 10$, то $z' > 0$, тогда $x = 10$ – точка минимума, значит

$$z_{\text{наим}} = z(10) = 7000 \cdot 10^3 + 42000 \cdot 10^2 - 2940000 \cdot 10 + $$
$$+68600000 = 50400000 = 50{,}4 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, наименьшая сумма, которую придется тратить еженедельно составит 50,4 млн рублей.

Ответ: 50,4.

10. Евлампия является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $25t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий, и, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно $9t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t изделий. За каждый час работы (на каждом из заводов) Евлампия платит рабочему 100 д.е. Необходимо, чтобы за неделю суммарно

производилось 15 изделий. Какую наименьшую сумму (в д.е.) придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

I. Строим модель

Пусть $25x^3$ часов рабочие трудятся на заводе, расположенном в первом городе, тогда оплата труда суммарно $100 \cdot 25x^3 = 2500x^3$ д.е., $9y^3$ часов – во втором городе, тогда оплата труда суммарно составит $100 \cdot 9y^3 = 900y^3$ д.е.

Пусть z – сумма еженедельной оплаты труда.

Тогда общая оплата труда с двух заводов: $2500x^3 + 900y^3 = z$.

При этом на заводе, расположенном в первом городе, производят x единиц товара, во втором – y единиц товара.

<table>
<tr><th>Завод</th><th colspan="2">Производительность</th><th>Время</th><th>Оплата за час</th><th>Оплата за неделю</th></tr>
<tr><td>1</td><td>x</td><td rowspan="2">15</td><td>$25x^3$</td><td>100</td><td rowspan="2">z</td></tr>
<tr><td>2</td><td>y</td><td>$9y^3$</td><td>100</td></tr>
</table>

Используя полученную таблицу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2500x^3 + 900y^3 = z \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2500x^3 + 900y^3 = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ z = 2500x^3 + 900y^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 2500x^3 + 900(15 - x)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 1600x^3 + 40500x^2 - 607500x + 3037500$$

Требуется найти $z_{\text{наим}}$.

Найдем производную функции z:

$$z' = 4800x^2 + 81000x - 607500$$

$$z' = 0 \Rightarrow 4800x^2 + 81000x - 607500 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2 + 270x - 2025 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5{,}625 \\ x = -22{,}5 - \text{не удов. усл. задачи} \end{array}\right. \Rightarrow x = 5\tfrac{5}{8}$$

Наименьшее значение z будет достигаться при $x = 5$ или $x = 6$.

$$z(5) = 1600 \cdot 5^3 + 40500 \cdot 5^2 - 607500 \cdot 5 + 3037500 = 1212500$$

$$z(6) = 1600 \cdot 6^3 + 40500 \cdot 6^2 - 607500 \cdot 6 + 3037500 = 1196100$$

$1196100 < 1212500$
Таким образом, наименьшая сумма, которую придется тратить еженедельно составит 1196100 д.е.
Ответ: 1196100.

11. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?
I. Строим модель
В каждой области рабочие трудятся по $50 \cdot 10 = 500$ часов.
Пусть в первой области будет затрачено на добычу алюминия x человеко-часов, где $x \in [0; 500]$, а y^2 часов затрачено на добычу y кг алюминия во второй области, где $y^2 \in [0; 500]$, $y \in [0; 10\sqrt{5}]$.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Количество, кг	Количество человеко-часов	Количество, кг
1-ая область	x	$0{,}2x$	$500 - x$	$0{,}1(500 - x)$
2-ая область	y^2	y	$500 - y^2$	$\sqrt{500 - y^2}$
ВСЕГО		$0{,}2x + y$		$0{,}1(500 - x) + \sqrt{500 - y^2}$

Т.к. на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля, то

$2(0{,}2x + y) = 0{,}1(500 - x) + \sqrt{500 - y^2} => 0{,}5x =$
$= 50 - 2y + \sqrt{500 - y^2}$
Пусть z – масса сплава, тогда
$z = 0{,}2x + y + 0{,}1(500 - x) + \sqrt{500 - y^2} =>$
$=> z = 0{,}1x + y + 50 + \sqrt{500 - y^2}$. Составим систему:

$$\begin{cases} 0{,}5x = 50 - 2y + \sqrt{500 - y^2} \\ z = 0{,}1x + y + 50 + \sqrt{500 - y^2} \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 0{,}5x = 50 - 2y + \sqrt{500 - y^2} \\ z = 0{,}1x + y + 50 + \sqrt{500 - y^2} \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} 0{,}1x = 10 - \frac{2}{5}y + \frac{\sqrt{500 - y^2}}{5} \\ z = 0{,}1x + y + 50 + \sqrt{500 - y^2} \end{cases} =>$$

$z = 10 - \frac{2}{5}y + \frac{\sqrt{500-y^2}}{5} + y + 50 + \sqrt{500 - y^2} =$
$= 60 + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5}\sqrt{500 - y^2}$
Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $y \in [0; 10\sqrt{5}]$
Найдем производную функции z:

$$z' = \frac{3}{5} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2}(500 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = \frac{3}{5} - \frac{6y}{5\sqrt{500-y^2}} = \frac{3\sqrt{500-y^2} - 6y}{5\sqrt{500-y^2}}$$

$$z' = 0, \frac{3\sqrt{500-y^2} - 6y}{5\sqrt{500-y^2}} = 0 => \left[\begin{array}{l} y = \pm 10 \\ y \neq \pm 10\sqrt{5} \end{array}\right.$$

По условию задачи $y \neq -10$.
Проверим значение производной на промежутках
$0 \le x < 10; 10 < x < 10\sqrt{5}$.
Если $0 \le x < 10$, то $z' > 0$, если $10 < x < 10\sqrt{5}$, то $z' < 0$, тогда $x = 10$ – точка максимума, значит
$z_{\text{наиб}} = z(10) = 60 + \frac{3}{5} \cdot 10 + \frac{6}{5}\sqrt{500 - 10^2} = 90$.
Таким образом, наибольшее количество сплава – 90 кг.
Ответ: 90.

12. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

I. Строим модель

В каждой области рабочие трудятся по $160 \cdot 5 = 800$ часов.

Так как алюминий можно заменить никелем, то нужно, чтобы все рабочие первой области добывали никель, так как никеля за час добывают в 3 раза больше, чем алюминия. Пусть y^2 часов затрачено на добычу y кг алюминия во второй области, где $y^2 \in [0; 800]$, тогда $y \in [0; 20\sqrt{2}]$.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Количество, кг	Количество человеко-часов	Количество, кг
1-ая область	0	0	800	$800 \cdot 0{,}3 = 240$
2-ая область	y^2	y	$800 - y^2$	$\sqrt{800 - y^2}$
ВСЕГО		y		$240 + \sqrt{800 - y^2}$

Пусть z – масса сплава, тогда $z = y + 240 + \sqrt{800 - y^2}$

II. Вычисления

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $y \in [0; 20\sqrt{2}]$

Найдем производную функции z:

$$z' = 1 + \frac{1}{2}(800 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = 1 - \frac{y}{\sqrt{800-y^2}} = \frac{\sqrt{800-y^2}-y}{\sqrt{800-y^2}}$$

$z' = 0, \frac{\sqrt{800-y^2}-y}{\sqrt{800-y^2}} = 0 => \left[\begin{array}{l} y = \pm 20 \\ y \neq \pm 20\sqrt{2} \end{array}\right.$

По условию задачи $y \neq -20$.

Проверим значение производной на промежутках

$0 \leq x < 20; 20 < x < 20\sqrt{2}$.

Если $0 \leq x < 20$, то $z' > 0$, если $20 < x < 20\sqrt{2}$, то $z' < 0$, тогда $x = 20$ – точка максимума, значит

$z_{\text{наиб}} = z(20) = 20 + 240 + \sqrt{800 - 20^2} = 280$.

Таким образом, наибольшее количество сплава – 280 кг.

Ответ: 280.

13. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудится 5 часов в день. При этом один рабочий добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудится 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

I. Строим модель

В первой шахте рабочие трудятся $100 \cdot 5 = 500$ часов, во второй шахте рабочие трудятся $300 \cdot 5 = 1500$ часов.

Пусть в первой шахте будет затрачено на добычу алюминия x человеко-часов, где $x \in [0; 500]$, а во второй шахте будет затрачено на добычу алюминия y человеко-часов, где $y \in [0; 1500]$.

	Алюминий		Никель	
	Количество человеко-часов	Количество, кг	Количество человеко-часов	Количество, кг
1-ая шахта	x	$1 \cdot x$	$500 - x$	$3(500 - x)$
2-ая шахта	y	$3y$	$1500 - y$	$1 \cdot (1500 - y)$
ВСЕГО		$x + 3y$		$3000 - 3x - y$

Т.к. на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля, то
$x + 3y = 2(3000 - 3x - y) => 5y = 6000 - 7x$
Пусть z – масса сплава, тогда $z = x + 3y + 3000 - 3x - y =>$
$=> z = 2y - 2x + 3000$. Составим систему:

$$\begin{cases} 5y = 6000 - 7x \\ z = 2y - 2x + 3000 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 5y = 6000 - 7x \\ z = 2y - 2x + 3000 \end{cases} => \begin{cases} 2y = 2400 - \frac{14}{5}x \\ z = 2y - 2x + 3000 \end{cases} =>$$

$$=> z = 2400 - \frac{14}{5}x - 2x + 3000 = 5400 - \frac{24}{5}x$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $x \in [0; 500]$.

Т.к. функция $z = 5400 - \frac{24}{5}x$ – линейная с отрицательным коэффициентом, значит наибольшее значение функции достигается при $x = 0 => z_{\text{наиб}} = 5400 - \frac{24}{5} \cdot 0 = 5400$

Таким образом, наибольшее количество сплава – 5400 кг.
Ответ: 5400.

14. В двух шахтах добывают цинк и олово. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг цинка или 1 кг олова. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудится 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг цинка или 2 кг олова. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где производится сплав цинка и олова, в котором на 2 кг

цинка приходится 1 кг олова. Шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

I. Строим модель

В первой шахте рабочие трудятся $60 \cdot 5 = 300$ часов, во второй шахте рабочие трудятся $100 \cdot 5 = 500$ часов. Пусть в первой шахте будет затрачено на добычу цинка x человеко-часов, $x \in [0; 300]$, а во второй шахте будет затрачено на добычу цинка y человеко-часов, где $y \in [0; 500]$.

	Цинк		Олово	
	Количество человеко-часов	Количество, кг	Количество человеко-часов	Количество, кг
1-ая шахта	x	$2x$	$300 - x$	$1 \cdot (300 - x)$
2-ая шахта	y	$1 \cdot y$	$500 - y$	$2(500 - y)$
ВСЕГО		$2x + y$		$1300 - x - 2y$

Т.к. на 2 кг цинка приходится 1 кг олова, то

$2x + y = 2(1300 - x - 2y) => 5y = 2600 - 4x$

Пусть z – масса сплава, тогда $z = 2x + y + 1300 - x - 2y =>$

$=> z = x - y + 1300$. Составим систему:

$$\begin{cases} 5y = 2600 - 4x \\ z = x - y + 1300 \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 5y = 2600 - 4x \\ z = x - y + 1300 \end{cases} => \begin{cases} y = 520 - \frac{4}{5}x \\ z = x - y + 1300 \end{cases} =>$$

$$=> z = x - \left(520 - \frac{4}{5}x\right) + 1300 = \frac{9}{5}x + 780$$

Требуется найти $z_{наиб}$ при $x \in [0; 300]$. Т.к. функция $z = \frac{9}{5}x + 780$ – линейная с положительным коэффициентом, значит наибольшее значение функции достигается при $x = 300 =>$

$=> z_{наиб} = \frac{9}{5} \cdot 300 + 780 = 1320$

Таким образом, наибольшее количество сплава – 1320 кг.

Ответ: 1320.

15. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей А или 15 деталей В. На втором комбинате работает 100 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей А или 5 деталей В. Оба эти комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужно 2 детали А и 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену?

I. Строим модель

Пусть на первом комбинате будет затрачено на изготовление детали А x человеко-смен, где $x \in [0; 40]$, а на втором комбинате будет затрачено на изготовление детали А y человеко-смен, причем $y \in [0; 100]$.

	Деталь А		Деталь Б	
	Количество человеко-смен	Количество, шт	Количество человеко-смен	Количество, шт
1-ый комбинат	x	$5x$	$40 - x$	$15(40 - x)$
1-ой комбинат	y	$15y$	$100 - y$	$5(100 - y)$
ВСЕГО		$5x + 15y$		$1100 - 15x - 5y$

Т.к. для изготовления одного изделия нужно 2 детали А и 1 деталь В, то

$5x + 15y = 2(1100 - 15x - 5y) => 5y = 440 - 7x$

Пусть z – количество изделий (количество деталей Б, т.к. их для изделия требуется меньше), тогда: $z = 1100 - 15x - 5y$. Составим систему:

$$\begin{cases} 5y = 440 - 7x \\ z = 1100 - 15x - 5y \end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases} 5y = 440 - 7x \\ z = 1100 - 15x - 5y \end{cases} => z = 1100 - 15x - (440 - 7x) =>$$

$$=> z = 660 - 8x$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $x \in [0; 40]$.

Т.к. функция $z = 660 - 8x$ – линейная с отрицательным коэффициентом, значит наибольшее значение функции достигается при $x = 0 => z_{\text{наиб}} = 660 - 8x \cdot 0 = 660$

Таким образом, наибольшее количество изделий – 660.

Ответ: 660.

16. На каждом из двух заводов работает по 100 человек. На первом заводе один рабочий изготавливает за смену 3 детали А или 1 деталь В. На втором заводе для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба завода поставляют детали на комбинат, где собирают изделие, причем для его изготовления нужна 1 деталь А и 3 детали В. При этом заводы договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

I. Строим модель

Пусть на первом комбинате будет затрачено на изготовление детали А x человеко-смен, где $x \in [0; 100]$, а на втором комбинате будет затрачено на изготовление детали А y^2 человеко-смен, где $y^2 \in [0; 100]$, тогда $y \in [0; 10]$.

	Деталь А		Деталь Б	
	Количество человеко-смен	Количество, шт	Количество человеко-смен	Количество, шт

1-ый комбинат	x	$3x$	$100-x$	$1\cdot(100-x)$
1-ой комбинат	y^2	y	$100-y^2$	$\sqrt{100-y^2}$
ВСЕГО		$3x+y$		$100-x+\sqrt{100-y^2}$

Т.к. для изготовления одного изделия нужно 1 деталь А и 3 детали В, то

$3(3x+y)=100-x+\sqrt{100-y^2}=>$

$=>10x=100-3y+\sqrt{100-y^2}$

Пусть z – количество изделий (количество деталей А, т.к. их для изделия требуется меньше), тогда: $z=3x+y$. Составим систему:

$$\begin{cases}10x=100-3y+\sqrt{100-y^2}\\ z=3x+y\end{cases}$$

II. Вычисления

$$\begin{cases}10x=100-3y+\sqrt{100-y^2}\\ z=3x+y\end{cases}=>$$

$$=>\begin{cases}3x=30-\frac{9}{10}y+\frac{3\sqrt{100-y^2}}{10}\\ z=3x+y\end{cases}=>$$

$$=>z=30-\frac{9}{10}y+\frac{3\sqrt{100-y^2}}{10}+y=>z=30+\frac{1}{10}y+\frac{3\sqrt{100-y^2}}{10}$$

Требуется найти $z_{\text{наиб}}$ при $y\in[0;10]$.

Найдем производную функции z:

$$z'=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}(100-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2y)=\frac{1}{10}-\frac{3y}{10\sqrt{100-y^2}}=\frac{\sqrt{100-y^2}-3y}{10\sqrt{100-y^2}}$$

$$z'=0,\frac{\sqrt{100-y^2}-3y}{10\sqrt{100-y^2}}=0=>\left[\begin{array}{l}y=\pm\sqrt{10}\\ y\neq\pm10\end{array}\right.$$

По условию задачи $y\neq-\sqrt{10}$.

Проверим значение производной на промежутках

$0\leq x<\sqrt{10};\sqrt{10}<x\leq10$.

Если $0\leq x<\sqrt{10}$, то $z'>0$, если $\sqrt{10}<x\leq10$, то $z'<0$, тогда $x=\sqrt{10}$ – точка максимума, значит

$z_{наиб} = z(\sqrt{10}) = 30 + \frac{1}{10}\sqrt{10} + \frac{3\sqrt{100-(\sqrt{10})^2}}{10} = 30 + \sqrt{10}.$

$3 < \sqrt{10} < 4 => 33 < 30 + \sqrt{10} < 34 =>$ максимум можно изготовить 33 изделия.

Ответ: 33.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

I. Строим модель

На втором поле урожайность свеклы выше, и она дороже, значит его следует засадить полностью свеклой. Пусть x га первого поля засадили картофелем, где $x \in [0; 20]$.

	Картофель		Свекла	
	Площадь, га	Стоимость, тыс. руб	Площадь, га	Стоимость, тыс. руб
1-ое поле	x	$450x \cdot 2$	$20 - x$	$250(20 - x) \cdot 2{,}5 = 12500 - 625x$
2-ое поле	0	0	20	$400 \cdot 20 \cdot 2{,}5 = 20000$
ВСЕГО		$900x$		$32500 - 625x$

Пусть z – прибыль от продажи овощей, тогда:

$z = 900x + 32500 - 625x => z = 275x + 32500$

II. Вычисления

Требуется найти $z_{наиб}$ при $x \in [0; 20]$.

Т.к. функция $z = 275x + 32500$ – линейная с положительным коэффициентом, значит наибольшее значение функции достигается при $x = 20 => z_{наиб} = 275 \cdot 20 + 32500 = 38000$

Таким образом, наибольшая прибыль от продажи овощей составит 38000 тыс. руб. или 38000000 руб.
Ответ: 38000000.

18. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» - 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?
I. Строим модель
В отеле может поместиться $\frac{981}{27} \approx 36$ стандартных номеров или $\frac{981}{45} \approx 21$ номер «люкс».
Пусть x – количество стандартных номеров, где $x \in [0; 36]$, y – количество номеров «люкс», где $y \in [0; 21]$.

	Количество номеров	Площадь, м^2	Стоимость, тыс. руб/сутки
Стандарт	x	$27x$	$2x$
«Люкс»	y	$45y$	$4y$
ВСЕГО		$27x + 45y \leq 981$	$2x + 4y$

Пусть z – прибыль от сдачи номеров, тогда:
$z = 2x + 4y = 2(x + 2y)$
II. Вычисления
Т.к. требуется найти наибольшую сумму, которую предприниматель заработает за одни сутки, то следует максимизировать значения выражения $2(x + 2y)$, то есть $x + 2y$:
$27x + 45y \leq 981 => x \leq \frac{981-45y}{27} => x \leq \frac{109-5y}{3} =>$

$=> x+2y \le \frac{109-5y}{3}+2y => x+2y \le \frac{109+y}{3}$, тогда y должен быть наибольшим, значит $x+2y \le \frac{109+21}{3} => x+2y \le 43\frac{1}{3}$, но x и y – целые, тогда $x+2y \le 43$.
При этом равенство достигается при $x=3, y=20$.
Максимальный доход составляет $2(3+2\cdot 20)=86$.
Таким образом, наибольшая прибыль составит 86 тыс. руб. или 86000 руб.
Ответ: 86000.

19. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=0{,}5x^2+x+7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?
I. Строим модель
Прибыль за 1 год выражается формулой:
$y=px-q=px-(0{,}5x^2+x+7)$.
По условию задачи: $3y \ge 75 => y \ge 25$, тогда
$px-(0{,}5x^2+x+7) \ge 25$
II. Вычисления
$px-(0{,}5x^2+x+7) \ge 25 => px-0{,}5x^2-x-7 \ge 25 =>$
$=> x^2-2(p-1)x+64 \le 0$
Неравенство будет иметь решение, если $D \ge 0$.
$D=\left(-2(p-1)\right)^2-4\cdot 1\cdot 64=4(p-1)^2-256$
$4(p-1)^2-256 \ge 0 => (p-1)^2-64 \ge 0 => \left[\begin{array}{l} p \le -7 \\ p \ge 9 \end{array}\right.$
Т.к., по условию p – цена за единицу продукции, то $p \ge 9$, тогда наименьшее значение: $p=9$ тыс. руб.
Ответ: 9.

20. Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0{,}5x^2 + x + 9)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?
I. Строим модель
Пусть прибыль за 1 год в млн рублей будет задана функцией:
$f(x) = px - (0{,}5x^2 + x + 9) \Rightarrow f(x) = -0{,}5x^2 + x(p-1) - 9$
Т.к. необходимо найти наибольшую прибыль, то следует найти наибольшее значение функции.
Функция $f(x) = -0{,}5x^2 + x(p-1) - 9$ – квадратичная, графиком является парабола с ветвями вниз, значит наибольшее значение функции достигается в вершине параболы:
$x_0 = \frac{-(p-1)}{2\cdot(-0{,}5)} = p - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(p-1) = -0{,}5(p-1)^2 + (p-1)^2 - 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(p-1) = 0{,}5(p-1)^2 - 9.$
Строительство завода должно окупить не более, чем за 5 лет, т.е. прибыль за 5 лет должна быть больше стоимости постройки завода:
$5f(p-1) \geq 115$
II. Вычисления
$5f(p-1) \geq 115 \Rightarrow 5(0{,}5(p-1)^2 - 9) \geq 115 \Rightarrow$
$\Rightarrow (p-1)^2 - 64 \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p \leq -7 \\ p \geq 9 \end{array}\right.$
Т.к., по условию p – цена за единицу продукции, то $p \geq 9$, тогда наименьшее значение: $p = 9$ тыс. руб.
Ответ: 9.

21. Зависимость количества Q (в шт., $0 \leq Q \leq 15000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q =$

$= 15000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 1000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей ($0 < t < 10000$) с каждой произведенной единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 3000Q - 1000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей. Фирма производит такое количество товара, при котором ее прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?

I. Строим модель

Т.к. $Q = 15000 - P$, то $P = 15000 - Q$, тогда

$PQ - 3000Q - 1000000 - tQ = (15000 - Q)Q - 3000Q -$
$-1000000 - tQ = -Q^2 + Q(12000 - t) - 1000000$

Т.к. прибыль максимальная, а функция квадратичная с графиком параболой (ветви вниз), то наибольшее значение достигается в ее вершине:

$Q_0 = \frac{-(12000-t)}{2\cdot(-1)} = \frac{12000-t}{2} = 6000 - \frac{t}{2} => tQ = 6000t - \frac{t^2}{2}$.

Следует найти t, при котором сумма налогов, собранных государством, максимальна, т.е. найти точку максимума функции $6000t - \frac{t^2}{2}$.

II. Вычисления

Функция $6000t - \frac{t^2}{2}$ – квадратичная, графиком является парабола с ветвями вниз, значит наибольшее значение достигается в ее вершине: $t_0 = \frac{-6000}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 6000$.

Таким образом, при $t = 6000$ общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной.

Ответ: 6000.

Задачи для самостоятельной работы

1. Алексей приобрел ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей

может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 8%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?
Ответ: 6.

2. В начале 2001 года Алексей приобрел ценную бумагу за 19000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?
Ответ: 2005.

3. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t $(t = 1;\ 2;\ 3; \ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце одиннадцатого года. При каких положительных значениях r это возможно?
Ответ: $r \in \left(\frac{1}{11}; \frac{1}{10}\right)$.

4. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t $(t = 1; 2; \ldots)$. В конце любого года можно продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет

увеличиваться на 24%. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцатого года сумма на его счете была наибольшей?
Ответ: 5.

5. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара, а, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 6800000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?
Ответ: 680.

6. Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 рублей. Вадим готов выделять 1200000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?
Ответ: 100.

7. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более

совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара, а, если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 410 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?
Ответ: 2050000.

8. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?
Ответ: 240.

9. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу

металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?
Ответ: 165.

10. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудится 5 часов в день. При этом один рабочий добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудится 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?
Ответ: 1050.

11. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 450 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором 200 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 1200 руб. за центнер, а свеклу – по цене 1400 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?
Ответ: 14400000.

12. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет.

Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» - 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?
Ответ: 104500.

13. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + {}$ ${}+2x + 5$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?
Ответ: 8.

14. Строительство нового завода стоит 122 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 - 2x + 10$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за год составит $px - (0{,}5x^2 - 2x + 10)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?
Ответ: 7.

15. Зависимость количества Q (в шт., $0 \leq Q \leq 20000$) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q =$ $= 20000 - P$. Затраты на производство Q единиц товара составляют $6000Q + 4000000$ рублей. Кроме затрат на производство, фирма должна платить налог t рублей $(0 < t < 10000)$ с каждой произведенной единицы товара. Таким образом, прибыль фирмы составляет $PQ - 6000Q - 4000000 - tQ$ рублей, а общая сумма налогов, собранных государством, равна tQ рублей.
Фирма производит такое количество товара, при котором ее прибыль максимальна. При каком значении t общая сумма налогов, собранных государством, будет максимальной?
Ответ: 7000.

Список литературы

1. Математика : 5-й класс : базовый уровень : учебник : в 2 частях / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков [и др.]. – 4-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2024.

2. Математика : 6-й класс : базовый уровень : учебник : в 2 частях / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков [и др.]. – 4-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2024.

3. Математика. Алгебра : 7-й класс : углубленный уровень : учебное пособие / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Фекотистов. – Москва : Просвещение, 2024.

4. Математика. Алгебра : 8-й класс : углубленный уровень : учебное пособие / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Фекотистов. – Москва : Просвещение, 2022.

5. Математика. Алгебра : 9-й класс : углубленный уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, И. Е. Феоктистов. – 6-е изд. стер. – Москва : Просвещение, 2024.

6. Математика. Алгебра и начала математического анализа : 10-й класс : углубленный уровень : учебник / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков. – 8-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2024.

7. Математика. Алгебра и начала математического анализа : 11-й класс : углубленный уровень : учебник / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков ; под ред. В. Е. Подольского. – 7-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2024.

8. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2024 года. Математика / Федеральный институт педагогических измерений. – URL: https://fipi.ru/ege/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf (дата обращения: 06.11.2023). – Текст: электронный.

9. Николаева И. П. Экономический словарь : ООО «Проспект», 2014. – 160с. – URL: https://www.litres.ru/book/irina-pavlovna-nikolaeva/ekonomicheskiy-slovar-21536061/ (дата обращения: 22.11.2023). – Текст: электронный.

10. Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика. Профильный уровень / Федеральный институт педагогических измерений. – URL: https://ege.fipi.ru/bank/ (дата обращения: 06.11.2023). – Текст: электронный.

Приложения

Приложение 1. Проверяемые требования (умения), элементы содержания и критерии оценивания

Задача финансовой математики является заданием повышенной сложности №16 ЕГЭ профильного уровня.

Проверяемые требования (умения):

- умение решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами);

- составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов;

- умение моделировать реальные ситуации на языке математики;

- составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат.

Проверяемые элементы содержания:

- натуральные и целые числа. Признаки делимости целых чисел;

- рациональные числа. Обыкновенные и десятичные дроби, проценты, бесконечные периодические дроби;

- арифметический корень натуральной степени. Действия с арифметическими корнями натуральной степени;

- степень с целым показателем. Степень с рациональным показателем. Свойства степени;

- синус, косинус и тангенс числового аргумента. Арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента;

- логарифм числа. Десятичные и натуральные логарифмы;

- действительные числа. Арифметические операции с действительными числами. Приближённые вычисления, правила округления, прикидка и оценка результата вычислений;

- преобразование выражений;
- целые и дробно-рациональные уравнения;
- иррациональные уравнения;
- тригонометрические уравнения;
- показательные и логарифмические уравнения;
- целые и дробно-рациональные неравенства;
- иррациональные неравенства;
- показательные и логарифмические неравенства;
- тригонометрические неравенства;
- системы и совокупности уравнений и неравенств;
- уравнения, неравенства и системы с параметрами;
- функция, способы задания функции. График функции. Взаимно обратные функции. Чётные и нечётные функции. Периодические функции;
- область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Промежутки монотонности функции. Максимумы и минимумы функции. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке;
- степенная функция с натуральным и целым показателем. Её свойства и график. Свойства и график корня -ой степени;
- тригонометрические функции, их свойства и графики;
- показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики;
- последовательности, способы задания последовательностей;
- арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула сложных процентов.

Критерии проверки и оценка решений задания:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Приложение 2. Типичные ошибки при решении задач финансовой математики

1. Упрощение условий, замена задачи на более простую (например, решение задачи с дополнительным условием заменяется решением классической задачи с дифференцированными платежами);
2. Отсутствие каких-либо пояснений при составлении математической модели;
3. Отсутствие математической модели;
4. Не оценивается правильность ответа несмотря на то, что получены результаты, явно противоречащие условиям;
5. Вычислительные ошибки;
6. Отсутствие точного ответа (например, ответ 800 означает 800 рублей, а не 800 тысяч рублей);
7. При решении неравенств непереводимые дроби в десятичные записываются не смешанным числом, а приближенным значением;
8. Вместо неравенства решается уравнение (или наоборот), вместо нестрого неравенства решается строгое (или наоборот).

Приложение 3. Методические рекомендации обучения решению задач финансовой математики

Решение задач финансовой математики связано со знанием некоторых специфических математических моделей из области экономики, умением переводить сформулированные в виде текста условия в уравнения и неравенства и пониманием того, как решения полученных уравнений и неравенств соотносятся с тем, что написано в условии задачи, – то есть какой смысл имеют полученные результаты.

Прежде всего, стоит вспомнить основные правила решения текстовых задач (они пригодятся и для решения более простой текстовой задачи варианта КИМ).

Решение любой текстовой задачи складывается из нескольких основных моментов:

- чтение условия задачи, объяснение сути описанного в задаче процесса;
- выбор переменных: для каждого типа задач существуют рекомендации, какие величины лучше всего обозначать как переменные (и это не всегда те величины, о которых идет речь в вопросе задачи); переменных при решении текстовой задачи нужно вводить столько, сколько их нужно для того, чтобы просто и логично составить уравнения и неравенства;
- составление уравнений и неравенств, формализация того, что необходимо найти в процессе решения задачи: при составлении уравнений обращать внимание на единицы измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин;
- решение полученного уравнения, неравенства или системы;
- исследование полученного результата и нахождение ответа на вопрос задачи.

Рекомендуемый порядок изучения/повторения тем:

- вычисление «простых» процентов;
- освоение формулы «сложных процентов» и ее применению в задачах с экономическим содержанием;
- решение задач на банковские вклады;

- решение задач на банковские кредиты (ознакомиться с двумя математическими моделями, рассмотреть их на простом жизненном примере). В основе этих схем лежит уже известная нам формула «сложных» процентов, а также свойства арифметической и геометрической прогрессий. Поэтому, прежде чем начинать знакомиться с «кредитной» математикой необходимо повторить некоторые свойства уже упомянутых прогрессий;

- при решении задач, в которых речь идет о выплате кредита в соответствии с дифференцированной или аннуитетной схемой, можно действовать двумя способами: либо использовать готовые формулы, полученные в ходе построения соответствующей математической модели, либо вычислять размер очередного платежа пошагово. Выбор способа зависит от условия задачи.

К наиболее сложным задачам с экономическим содержанием относятся так называемые «задачи на оптимальный выбор» или экстремальные задачи. Эти задачи описывают разнообразные ситуации, с которыми граждане, предприятия и компании могут встретиться в своей экономической деятельности. К решению таких задач есть несколько подходов, из которых наиболее часто используются метод перебора вариантов и логичных рассуждений, исследование функций элементарными методами и с помощью производной.

Как правило, при решении данных задач необходимо либо провести непосредственные вычисления и сравнить их результаты, либо составить уравнение (систему уравнений) и решить его (ее) с учетом некоторых дополнительных условий (например, в целых числах), либо построить функцию, устанавливающую связь между двумя экономическими величинами (например, между объемом производства и прибылью компании) и исследовать ее на экстремальное значение с помощью производной, опять же с учетом того, что данная функция описывает некий реальный процесс, от чего могут зависеть какие-то ограничения на область определения или область значений.

Учебное издание

Кирсанова Лариса Валерьевна

Финансовая математика в ЕГЭ по математике профильного уровня

В авторской редакции

ООО «Эдитус»
125565, Москва, Ленинградское шоссе, д. 80, стр. 1
8 (800) 775-30-87
www.editus.ru

Отпечатано в типографии ООО Фирма «П-Центр»
129515, г. Москва, ул. Академика Королёва, 13

Подписано в печать ?.?.?
Формат 148x210. Усл. печ. л. 9,875
Печать цифровая. Бумага офсетная
Тираж 20 экз. Заказ №202405131

ISBN 978-5-00217-353-2

www.editus.ru

9 785002 173532 >