А. В. Шевкин

ТРУДНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЕГЭ

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАЧИ
С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

ТРУДНЫЕ ЗАДАНИЯ

ЕГЭ

А. В. Шевкин

МАТЕМАТИКА

ТРУДНЫЕ ЗАДАНИЯ ЕГЭ

ЗАДАЧИ

С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Москва
«Просвещение»
2020

УДК 373:51+51(075.3)
ББК 22.1я721.6
Ш37

12+

Серия «Трудные задания ЕГЭ» основана в 2019 году

Шевкин А. В.

Ш37 Математика. Трудные задания ЕГЭ. Задачи с экономическим содержанием : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : профильный уровень / А. В. Шевкин. — М. : Просвещение, 2020. — 80 с. : ил. — (Трудные задания ЕГЭ). — ISBN 978-5-09-069017-1.

Учебное пособие предназначено для подготовки к единому государственному экзамену по математике профильного уровня. Издание включает разбор заданий № 17 ЕГЭ (задачи с экономическим содержанием), образцы решения и задания для самостоятельного решения. Начинается пособие с разбора простых задач, охватывающего разные идеи решений, затем рассматриваются более сложные задачи. Книга поможет школьникам подготовиться к решению одного из самых сложных заданий ЕГЭ и отработать навык решения подобных задач.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками для самоподготовки и самоконтроля.

УДК 373:51+51(075.3)
ББК 22.1я721.6

Учебное издание

Серия «Трудные задания ЕГЭ»

Шевкин Александр Владимирович

Математика

Трудные задания ЕГЭ

Задачи с экономическим содержанием

Учебное пособие для общеобразовательных организаций
Профильный уровень

Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Е. В. Эргле*, редактор *Л. В. Кузнецова*,
младшие редакторы *Е. А. Андреенкова*, *Е. В. Трошко*,
художественный редактор *Т. В. Глушкова*,
техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Э. В. Алексеева*,
компьютерная графика *К. В. Кергелен*, корректор *Е. В. Барановская*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 04.06.19. Формат $84 \times 108\,^1/_{16}$.
Бумага типографская. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,26.
Тираж 3000 экз. Заказ № 4432/19 ПАР.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в ООО «ИПК Парето-Принт».
170546, Тверская область, Промышленная зона Боровлево-1, комплекс № 3А. www.pareto-print.ru

ISBN 978-5-09-069017-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи с экономическим содержанием, предлагавшиеся на ЕГЭ в 2015—2018 гг., разнообразны по сюжетам и расположены в пособии согласно методическому принципу от простого к сложному — от темы к теме и от задачи к задаче внутри темы. Решения задач описаны подробно, к некоторым из них приведено второе решение; это сделано с учебной целью. На экзамене решение надо будет записать кратко, но обоснованно. В пособие добавлены подготовительные задачи, раскрывающие идею решения некоторых задач в более простой ситуации, а также задачи, помогающие сделать стройнее структуру пособия. Среди них есть и простые, и сложные.

Подбирая задачи, связанные одним сюжетом, мы старались избегать однотипных задач, разбирая их только в том случае, когда можно показать разные способы решения или разную степень подробности обоснования решения. Аналогичные задачи с другими числовыми данными оставлены для самостоятельного решения. Для ориентирования в сюжетах задач пособие структурировано по разделам, названия которых раскрывают тематику включённых в них задач.

У читателя, возможно, возникнет вопрос: «А как работать с этой книгой?» Ответ на него прост.

Пытайтесь решить каждую прочитанную задачу (более простые задачи встречаются раньше). В случае неудачи постарайтесь продвинуться в решении как можно дальше. Это умение даст вам на ЕГЭ дополнительные баллы даже в том случае, если решение задачи не удаётся довести до конца.

Если не получилось решить задачу самостоятельно, то разберите решение по книге и постарайтесь понять, что вызвало у вас затруднение, где была допущена ошибка.

Попробуйте самостоятельно решить ту же задачу через некоторое время или аналогичную задачу.

Наибольший доход фермера, или Метод Удодова-старшего

Рассмотрим задачи на нахождение наибольшего дохода фермера.

ЗАДАЧА 1. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель или свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по 10 000 р. за центнер, а свёклу по 13 000 р. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Пусть на первом поле x га занято картофелем и $(10-x)$ га — свёклой, на втором поле y га занято картофелем и $(10-y)$ га — свёклой. Тогда доход (в рублях) вычислим по формуле

$$(300x+200y)\cdot 10\,000+(200(10-x)+300(10-y))\cdot 13\,000=$$
$$=100\,000\cdot(4x-19y+650).$$

Доход фермера будет наибольшим при наибольшем возможном значении x и наименьшем возможном значении y, т. е. при $x=10$ и $y=0$. Наибольший доход фермера равен $69\,000\,000$ р.

2-й способ. Для самоконтроля решим задачу «по-нашему, по-неучёному», как говаривал Удодов-старший из рассказа А. П. Чехова «Репетитор».

1 га, занятый картофелем, на первом поле приносит $300\cdot 10\,000=3\,000\,000$ (р.) дохода, а на втором — $200\cdot 10\,000=2\,000\,000$ (р.) дохода.

1 га, занятый свёклой, на первом поле приносит $200\cdot 13\,000=2\,600\,000$ (р.) дохода, а на втором — $300\cdot 13\,000=3\,900\,000$ (р.) дохода.

Картофель выгоднее сажать на первом поле, причём выгоднее, чем свёклу. Свёклу выгоднее сажать на втором поле, причём выгоднее, чем картофель. Наибольший доход составляет $3\,000\,000\cdot 10+3\,900\,000\cdot 10=69\,000\,000$ (р.).

ОТВЕТ: 69 000 000 р.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вызывает удивление неправдоподобная цена, по которой фермеру удаётся продавать картофель и свёклу: 100 р. и 130 р. за 1 кг соответственно. Это в три-четыре раза дороже, чем цены на картофель и свёклу в Москве с наценками посредников и магазина. Так, в апреле 2017 г. в Москве можно было купить мытый картофель в упаковке по 3 кг за 109,9 р., а свёклу — по 29,9 р. за 1 кг. В следующих задачах цены ближе к реальным.

ЗАДАЧА 2. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель или свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5000 р. за центнер, а свёклу по цене 8000 р. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

РЕШЕНИЕ. 1 га, занятый картофелем, на первом поле приносит $500 \cdot 5000 = 2\,500\,000$ (р.) дохода, а на втором — $300 \cdot 5000 = 1\,500\,000$ (р.) дохода. 1 га, занятый свёклой, на первом поле приносит $300 \cdot 8000 = 2\,400\,000$ (р.) дохода, а на втором — $500 \cdot 8000 = 4\,000\,000$ (р.) дохода. Картофель выгоднее сажать на первом поле, причём выгоднее, чем свёклу, а свёклу выгоднее сажать на втором поле, причём выгоднее, чем картофель. Наибольший доход составляет $2\,500\,000 \cdot 10 + 4\,000\,000 \cdot 10 = 65\,000\,000$ (р.).

ОТВЕТ: 65 000 000 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 3. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель или свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 4000 р. за центнер, а свёклу по цене 5000 р. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решите задачу двумя способами: с использованием буквенных обозначений и без них, т. е. при помощи оценки дохода с 1 га картофеля и с 1 га свёклы для каждого участка. Такие оценки будут использоваться и далее, например, будет сравниваться доход владельца отеля с 1 м^2 площади гостиничных номеров разного класса и т. п.

Наибольший доход владельца отеля

ЗАДАЧА 4. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 $м^2$ и номера люкс площадью 45 $м^2$. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 $м^2$. Предприниматель может разделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Стандартный номер будет приносить отелю 2000 р. в сутки, а номер люкс — 4000 р. в сутки. Какую наибольшую сумму сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

РЕШЕНИЕ. Сначала выясним, какой вид номеров приносит больший доход с 1 $м^2$ своей площади. Так как $\frac{2000}{7} \approx 74$ меньше, чем $\frac{4000}{45} \approx 89$, то владельцу отеля выгоднее иметь больше номеров люкс, чем стандартных номеров.

Наибольшее возможное количество номеров люкс равно 21 — это 945 $м^2$ полезной площади, остаток площади (36 $м^2$) позволяет сделать только один стандартный номер. Доход в этом случае равен $21 \cdot 4000 + 1 \cdot 2000 = 86\,000$ (р.).

Если будет 20 номеров люкс, то на остатке площади (81 $м^2$) можно сделать 3 стандартных номера. Доход в этом случае равен $20 \cdot 4000 + 3 \cdot 2000 = 86\,000$ (р.).

Дальнейшее уменьшение количества номеров люкс приведёт к снижению дохода, так как излишка площади нет, а замена номеров люкс стандартными номерами снижает доход.

ОТВЕТ: 86 000 р.

ЗАДАЧА 5. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 $м^2$ и номера люкс площадью 49 $м^2$. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 $м^2$. Предприниматель может разделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Стандартный номер будет приносить отелю 2000 р. в сутки, а номер люкс — 4500 р. в сутки. Какую наибольшую сумму сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

РЕШЕНИЕ. Так как $\frac{2000}{21} \approx 95$ больше, чем $\frac{4500}{49} \approx 92$, то владельцу отеля выгоднее иметь больше стандартных номеров, чем номеров люкс.

Наибольшее возможное количество стандартных номеров равно 52 — это 1092 $м^2$ полезной площади, остаток площади (7 $м^2$) не позволяет сделать номер люкс. Доход в этом случае равен $52 \cdot 2000 = 104\,000$ (р.).

Если сделать 51 стандартный номер, то на остатке полезной площади (28 $м^2$) нельзя сделать даже один номер люкс. Доход в этом случае уменьшится.

Если сделать 50 стандартных номеров и 1 номер люкс, то остатка полезной площади не будет. Доход в этом случае равен $50 \cdot 2000 + 1 \cdot 4500 = 104\,500$ (р.).

Дальнейшее уменьшение количества стандартных номеров приведёт к снижению дохода, так как излишка площади нет, а замена стандартных номеров номерами люкс снижает доход.

ОТВЕТ: 104 500 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 6. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 м^2 и номера люкс площадью 45 м^2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 855 м^2. Предприниматель может разделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Стандартный номер будет приносить отелю 2000 р. в сутки, а номер люкс — 3000 р. в сутки. Какую наибольшую сумму сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Известно, что проценты иногда являются средством вольной или невольной манипуляции данными. Например, в рекламе можно встретить обещания типа «густота ваших ресниц повысится на 33 %» или «наше средство поможет вам похудеть на 100 %». Если 33 % вызывают сомнение в достоверности сообщаемой информации, то 100 % обещают «обнулить» вес пользователя с помощью чудесного средства. Надо не только научиться использовать проценты при вычислениях, но и выработать привычку критически относиться к данным, сообщаемым «в процентах». Этому помогут задачи следующей темы, связанные с «повышением эффективности» экономики города Глупова.

Экономика города Глупова

«Родной наш город Глупов, производя обширную торговлю квасом, печёнкой и варёными яйцами, имеет три реки и, в согласность Древнему Риму, на семи горах построен... Разница в том только состоит, что в Риме сияло нечестие, а у нас — благочестие, Рим заражало буйство, а нас — кротость, в Риме бушевала подлая чернь, а у нас — начальники».

М. Е. Салтыков-Щедрин (1826—1889)

Несколько лет назад учителя из союза школ сочинили задачи для учителей про изменения в образовании города Глупова. Попробуем развить эту идею — рассмотрим несколько шуточных задач по экономике города Глупова.

ЗАДАЧА 7. В городе Глупове было 10 мелких артелей по производству кваса, из них только две артели поставляли квас в столицу. Начальники города хотели повысить долю артелей, поставляющих квас в столицу. Для этого они укрупнили артели, но не объединяли успешные артели с неуспешными, чтобы не ухудшить качество кваса в успешных артелях. Теперь артелей стало пять. Снова вычислили, сколько процентов артелей поставляют квас в столицу. Какой ответ мог получиться?

РЕШЕНИЕ. До объединения две успешные артели составляли $\frac{2 \cdot 100\%}{10} = 20\%$ от десяти артелей.

Если объединили две успешные артели в одну, то новая артель составляет $\frac{1 \cdot 100\%}{5} = 20\%$ от пяти артелей.

Если оставили две успешные артели, то эти две артели составляют $\frac{2 \cdot 100\%}{5} = 40\%$ от пяти артелей.

Так как успешные артели с неуспешными не объединяли, то успешные артели могли составлять 20% или 40% от пяти артелей.

ОТВЕТ: 20% или 40%.

ЗАДАЧА 8. Глава города Глупова повысил зарплату писарей, не меняя общий объём их работы. Для этого количество страниц, переписываемых каждым писарем, увеличили на 25%, а за каждую переписанную страницу стали платить девять копеек вместо десяти.

а) Сколько процентов писарей осталось без работы?

б) На сколько процентов увеличилась в среднем зарплата писаря?

в) Сколько процентов общего фонда оплаты труда писарей сэкономил город?

РЕШЕНИЕ. а) Пусть в городе Глупове было x писарей. Так как общее количество страниц, переписываемых писарями, не изменилось, а количество страниц, переписываемых каждым писарем, увеличилось на 25%, или в 1,25 раза, то число писарей уменьшилось в 1,25 раза и составило $x : 1{,}25 = 0{,}8x$. Без работы остались $x - 0{,}8x = 0{,}2x$ писарей, или 20% их прежнего числа.

б) Пусть в среднем в месяц каждый писарь переписывал y страниц и получал $10y$ копеек, а теперь переписывает в 1,25 раза больше страниц, т. е. $1{,}25y$ страниц, и получает $9 \cdot 1{,}25y = 11{,}25y$ копеек. В среднем зарплата писаря увеличилась в 1,125 раза, или на 12,5%.

в) Так как общее количество страниц, переписываемых писарями, не изменилось, а за каждую страницу город платит теперь 0,9 прежней суммы, то за всю работу город платит 0,9 от прежнего общего фонда оплаты труда писарей. Экономия составляет $1 - 0{,}9 = 0{,}1$, или 10 %.

ОТВЕТ: а) 20%; б) на 12,5%; в) 10%.

ЗАДАЧА 9. а) В артели «Глуповский квас» было 40 работников, и они получали в среднем 20 р. в месяц. Из них 35 получали одинаково, на 20% меньше, чем в среднем, а 5 передовиков получали тоже одинаково, но больше, чем в среднем. Какую зарплату получали передовики?

б) В следующем месяце передовиков стало 10, остальные работники получали зарплату по-прежнему, и фонд оплаты труда не изменился. Какая теперь стала зарплата у передовиков?

в) Какой станет зарплата, если все работники станут передовиками?

РЕШЕНИЕ. а) В артели «Глуповский квас» фонд оплаты труда составлял $40 \cdot 20 = 800$ (р. в месяц), 35 работников получали по $20 \cdot (1 - 0{,}2) = 16$ (р.), а всего $35 \cdot 16 = 560$ (р.). Остаток фонда оплаты труда расходовался на зарплату пяти передовиков, поэтому передовики получали по $\frac{800 - 560}{5} = 48$ (р.).

б) В следующем месяце передовиков стало 10, остальные 30 работников получали по 16 р. в месяц, а всего $30 \cdot 16 = 480$ (р.). Остаток фонда оплаты труда расходовался на зарплату десяти передовиков, поэтому передовики получали по $\frac{800 - 480}{10} = 32$ (р.).

в) Если все работники станут передовиками, то будут получать по $800 : 40 = 20$ (р.)

ОТВЕТ: а) 48 р.; б) 32 р.; в) 20 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 10. В городе Глупове решили сэкономить на жалованье начальников за счёт объединения руководимых ими ведомств городской управы. При объединении ведомств увольняли начальника присоединяемого ведомства и его работу передавали начальнику присоединяющего ведомства. Одно ведомство присоединило ещё два. Считаем, что до объединения бюджеты ведомств и объём работы их начальников были одинаковыми. Жалованья начальников до объединения составляли 10% всех жалований работников руководимых ими ведомств, а после объединения жалованье оставшихся начальников не изменилось.

а) Сколько процентов фонда оплаты труда сэкономил город на объединении трёх ведомств? Ответ округлите до десятых.

б) На сколько процентов вырос объём работы неуволенного начальника?

Наибольший доход от продажи ценных бумаг

ЗАДАЧА 11. В начале 2001 г. Алексей приобрёл ценную бумагу за 25 000 р. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 р. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

РЕШЕНИЕ. Если бы Алексей продал бумагу в начале 2001 г. и положил вырученные деньги на банковский счёт, то ещё через 15 лет у него на счёте была бы сумма $25 \cdot 1{,}1^{15}$ тыс. р.

Если бы он сделал то же самое в начале 2002 г., то ещё через 14 лет у него на счёте была бы сумма $28 \cdot 1{,}1^{14}$ тыс. р.

Если увеличивать число лет, в течение которых Алексей не продаёт бумагу, то с каждым годом первый множитель в итоговой сумме будет увеличиваться на 3, а показатель степени второго множителя — уменьшаться на 1.

Запишем итоговые суммы, соответствующие году продажи бумаги, и их изменение по сравнению с предыдущим годом (в тысячах рублей):

2001 г. — $25 \cdot 1{,}1^{15}$,

2002 г. — $28 \cdot 1{,}1^{14}$, $\quad 28 \cdot 1{,}1^{14} - 25 \cdot 1{,}1^{15} = 1{,}1^{14} \cdot (28 - 25 \cdot 1{,}1) > 0$,

2003 г. — $31 \cdot 1{,}1^{13}$, $\quad 31 \cdot 1{,}1^{13} - 28 \cdot 1{,}1^{14} = 1{,}1^{13} \cdot (31 - 28 \cdot 1{,}1) > 0$,

2004 г. — $34 \cdot 1{,}1^{12}$, $\quad 34 \cdot 1{,}1^{12} - 31 \cdot 1{,}1^{13} = 1{,}1^{12} \cdot (34 - 31 \cdot 1{,}1) < 0$.

Итоговая сумма увеличивается до 2003 г. (включительно), впервые итоговая сумма уменьшится, если бумагу продать в начале 2004 г. Это означает, что бумагу надо продать в начале 2003 г.

ОТВЕТ: 2003.

ЗАДАЧА 12. В начале 2001 г. Алексей приобрёл ценную бумагу за 7000 р. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 2000 р. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

РЕШЕНИЕ. Если бы Алексей продал бумагу в начале 2001 г. и положил вырученные деньги на банковский счёт, то ещё через 15 лет у него на счёте была бы сумма $7 \cdot 1{,}1^{15}$ тыс. р.

Если бы он сделал то же самое в начале 2002 г., то ещё через 14 лет у него на счёте была бы сумма $9 \cdot 1{,}1^{14}$ тыс. р.

Если увеличивать число лет, в течение которых Алексей не продаёт бумаги, то с каждым годом первый множитель в итоговой сумме будет увеличиваться на 2, а показатель степени второго множителя — уменьшаться на 1.

Запишем итоговые суммы, соответствующие году продажи бумаги, и их изменение по сравнению с предыдущим годом (в тысячах рублей):

2001 г. — $7 \cdot 1{,}1^{15}$,

2002 г. — $9 \cdot 1{,}1^{14}$, $\qquad 9 \cdot 1{,}1^{14} - 7 \cdot 1{,}1^{15} = 1{,}1^{14} \cdot (9 - 7 \cdot 1{,}1) > 0$,

2003 г. — $11 \cdot 1{,}1^{13}$, $\qquad 11 \cdot 1{,}1^{13} - 9 \cdot 1{,}1^{14} = 1{,}1^{13} \cdot (11 - 9 \cdot 1{,}1) > 0$,

2004 г. — $13 \cdot 1{,}1^{12}$, $\qquad \ldots$

2005 г. — $15 \cdot 1{,}1^{11}$, $\qquad \ldots$

2006 г. — $17 \cdot 1{,}1^{10}$, $\qquad \ldots$

2007 г. — $19 \cdot 1{,}1^{9}$, $\qquad \ldots$

2008 г. — $21 \cdot 1{,}1^{8}$, $\qquad 21 \cdot 1{,}1^{8} - 19 \cdot 1{,}1^{9} = 1{,}1^{8} \cdot (21 - 19 \cdot 1{,}1) > 0$,

2009 г. — $23 \cdot 1{,}1^{7}$, $\qquad 23 \cdot 1{,}1^{7} - 21 \cdot 1{,}1^{8} = 1{,}1^{7} \cdot (23 - 21 \cdot 1{,}1) < 0$.

Итоговая сумма увеличивается до 2008 г.; впервые итоговая сумма уменьшится, если бумагу продать в начале 2009 г. Это означает, что бумагу надо продать в начале 2008 г.

ОТВЕТ: 2008.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 13. В начале 2001 г. Алексей приобрёл ценную бумагу за 19 000 р. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 р. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через 15 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

ЗАДАЧА 14. Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. р. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. р. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через 25 лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

РЕШЕНИЕ. Если бы Алексей продал бумагу в начале 1-го года и положил вырученные деньги на банковский счёт, то ещё через 25 лет у него на счёте была бы сумма $8 \cdot 1{,}08^{25}$ тыс. р. Если бы он сделал то же самое в начале 2-го года, то ещё через 24 года у него на счёте была бы сумма $9 \cdot 1{,}08^{24}$ тыс. р. Если увеличивать число лет, в течение которых Алексей не продаёт бумагу, то с каждым годом первый множитель в итоговой сумме будет увеличиваться на 1, а показатель степени второго множителя — уменьшаться на 1. Запишем итоговые суммы, соответствующие году продажи бумаги, и их изменение по сравнению с предыдущим годом (в тысячах рублей):

1-й год — $8 \cdot 1{,}08^{25}$,

2-й год — $9 \cdot 1{,}08^{24}$, $\qquad 9 \cdot 1{,}08^{24} - 8 \cdot 1{,}08^{25} = 1{,}08^{24} \cdot (9 - 8 \cdot 1{,}08) > 0$,

3-й год — $10 \cdot 1{,}08^{23}$, $\qquad 1{,}08^{23} \cdot (10 - 9 \cdot 1{,}08) > 0$,

4-й год — $11 \cdot 1{,}08^{23}$, $\qquad 1{,}08^{22} \cdot (11 - 10 \cdot 1{,}08) > 0$,

5-й год — $12 \cdot 1{,}08^{23}$, $\qquad 1{,}08^{21} \cdot (12 - 11 \cdot 1{,}08) > 0$,

6-й год — $13 \cdot 1{,}08^{23}$, $\qquad 1{,}08^{20} \cdot (13 - 12 \cdot 1{,}08) > 0$,

7-й год — $14 \cdot 1{,}08^{23}$, $\qquad 1{,}08^{19} \cdot (14 - 13 \cdot 1{,}08) < 0$.

Итоговая сумма увеличивается до 6-го года; впервые итоговая сумма уменьшится, если бумагу продать в течение 7-го года. Это означает, что бумагу надо продать в течение 6-го года.

ОТВЕТ: в течение 6-го года.

Следующая задача, продолжающая тему продажи ценных бумаг наиболее выгодным способом при имеющихся условиях, была предложена на ЕГЭ 2017 г.

ЗАДАЧА 15. Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. р. в конце года t ($t = 1, 2, \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце 25-го года сумма на его счёте была наибольшей. Расчёты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце 21-го года. При каких положительных значениях r это возможно?

РЕШЕНИЕ. В конце года стоимость ценных бумаг (здесь и далее в тысячах рублей) растёт по заданному закону продолжительное время (так бывает только в задачах). Будем считать, что одно и то же количество бумаг стоит в конце 1-го, 2-го, ..., 25-го годов соответственно

$$1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ 20^2,\ 21^2,\ 22^2,\ 23^2,\ 24^2,\ 25^2.$$

Проведём расчёты на тот случай, если продать ценные бумаги в конце любого из этих годов, кроме последнего, и деньги положить на счёт в банке. Оставшаяся до двадцати пяти число лет сумма будет увеличиваться в $1 + r$ раз ежегодно и составит соответственно

$$\begin{gathered}1^2 \cdot (1+r)^{24},\ 2^2 \cdot (1+r)^{23},\ \ldots,\ 20^2 \cdot (1+r)^5,\ 21^2 \cdot (1+r)^4,\\ 22^2 \cdot (1+r)^3,\ 23^2 \cdot (1+r)^2,\ 24^2 \cdot (1+r).\end{gathered} \tag{1}$$

По условию задачи сумма в конце 25-го года будет наибольшей, если продажа состоялась в 21-м году, т. е. наибольшая сумма равна $21^2 \cdot (1 + r)^4$. Из сравнения этой суммы с соседними членами последовательности (1) получим два неравенства:

$$20^2 \cdot (1+r)^5 < 21^2 \cdot (1+r)^4 \text{ и } 21^2 \cdot (1+r)^4 > 22^2 \cdot (1+r)^3.$$

Первое неравенство разделим на положительное число $(1 + r)^4$, второе — на $(1 + r)^3$. Получим границы для величин $1 + r$ и r:

$$\left(\frac{22}{21}\right)^2 < 1 + r < \left(\frac{21}{20}\right)^2,$$

$$\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}. \tag{2}$$

Неравенство (2) даёт границы для r, полученные из условия, что для членов последовательности (1) справедливы неравенства

$$a_{20} < a_{21} \text{ и } a_{21} > a_{22}.$$

Покажем теперь, что для членов последовательности (1) справедливы неравенства

$$a_1 < \ldots < a_{19} < a_{20} < a_{21} \text{ и } a_{21} > a_{22} > a_{23} > a_{24}.$$

Так как $a_{23} = a_{24} \cdot \left(\frac{23}{24}\right)^2 \cdot (1 + r)$, а $1 + r > \left(\frac{22}{21}\right)^2$, то

$$\left(\frac{23}{24}\right)^2 \cdot (1+r) > \left(\frac{23}{24}\right)^2 \cdot \left(\frac{22}{21}\right)^2 > 1,$$

поэтому $a_{23} > a_{24}$.

Аналогично убеждаемся, что $a_{22} > a_{23}$ (проверьте), а что $a_{21} > a_{22}$, известно из условия задачи.

По условию задачи также известно, что $a_{20} < a_{21}$.

Так как $a_{19} = a_{20} \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^2 \cdot (1 + r)$, а $1 + r < \left(\frac{21}{20}\right)^2$, то

$$\left(\frac{19}{20}\right)^2 \cdot (1 + r) < \left(\frac{19}{20}\right)^2 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^2 < 1,$$

поэтому $a_{19} < a_{20}$.

Далее каждый предыдущий член последовательности будет меньше последующего, так как получается из него умножением на один и тот же множитель $1 + r$ и на всё уменьшающиеся квадраты дробей

$$\left(\frac{18}{19}\right)^2, \left(\frac{17}{18}\right)^2, \ldots, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Таким образом, для всех r, удовлетворяющих неравенству (2), сумма, вырученная от продажи ценных бумаг в 21-м году, будет наибольшей.

ОТВЕТ: $\frac{43}{441} < r < \frac{41}{400}$.

На сколько процентов больше или меньше?

При решении задач с экономическим содержанием нужно свободно владеть процентными расчётами. Рассмотрим подготовительные задачи, объясняющие, как узнавать, на сколько процентов одно число больше (меньше) другого.

ЗАДАЧА 16. На сколько процентов число a больше, чем число b?

РЕШЕНИЕ. Число a составляет $\frac{a}{b}$ числа b, или $\frac{a \cdot 100\%}{b}$ числа b. Число a больше, чем число b, на $\frac{a \cdot 100\%}{b} - 100\% = \frac{(a-b) \cdot 100\%}{b}$. Таким образом, приходим к следующему правилу:

чтобы узнать, на сколько процентов число a больше, чем число b, надо из большего числа вычесть меньшее, разность разделить на то число, с которым сравниваем, и результат умножить на 100%:

$$\frac{(a-b) \cdot 100\%}{b}.$$

ОТВЕТ: на $\frac{(a-b) \cdot 100\%}{b}$.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 17. На сколько процентов число b меньше, чем число a?

Иногда ошибочно считают, что число a больше, чем число b, на столько же процентов, на сколько процентов число b меньше, чем число a. Убедиться в ошибке можно на примере.

Число 5 больше, чем число 4, на 1; число 4 меньше, чем число 5, на 1. Но число 1 составляет $\frac{1}{4}$, или 25%, числа 4, а также $\frac{1}{5}$, или 20%, числа 5. Поэтому число 5 больше, чем число 4, на 25% числа 4, а число 4 меньше, чем число 5, на 20% числа 5.

Упомянем и о другой распространённой ошибке. Иногда считают, что если число a увеличить на p%, а полученный результат уменьшить на те же p%, то получится исходное число a. Убедитесь в ошибке, увеличив число 100 на 10%, а потом уменьшив полученный результат на 10%.

В том и в другом случае к ошибке приводит сравнение процентов, найденных от разных чисел.

ЗАДАЧА 18. а) Мастер Иванов может выкопать колодец за 10 дней, а его ученик Петров — за 15 дней. Они договорились работать вместе и выкопали колодец за 5 дней. На сколько процентов возросла производительность труда каждого из них при совместной работе? Считайте, что производительность труда каждого работника постоянна, а при совместной работе она увеличилась в одно и то же число раз, или на одно и то же число процентов.

б) На сколько процентов увеличится зарплата каждого из двух работников в день, если совместно заработанные деньги они делят пропорционально производительности труда каждого?

РЕШЕНИЕ. а) Примем всю работу за 1. Мастер Иванов за день выполняет $\frac{1}{10}$ работы, а его ученик — $\frac{1}{15}$ работы. Если бы производительность не увеличивалась при совместной работе, то за 1 день они выполняли бы $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$ работы, а фактически они выполняли за 1 день $\frac{1}{5}$ работы. Следовательно, при совместной работе производительность труда увеличилась на $\dfrac{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot 100\,\%}{\frac{1}{6}}=20\,\%$. Так как производительность труда каждого работника при совместной работе увеличилась на одно и то же число процентов, то это увеличение составило $20\,\%$.

б) Так как при совместной работе производительность труда каждого работника увеличилась на $20\,\%$, то объём работы, выполняемой каждым работником в день, увеличился на $20\,\%$. Оплата труда пропорциональна объёму выполненной работы, поэтому зарплата каждого работника за день увеличится на $20\,\%$.

ОТВЕТ: а) на $20\,\%$; б) на $20\,\%$.

ЗАДАЧА 19. Остап Бендер купил для «Антилопы-Гну» 4 новых колеса. Передние колёса автомобиля изнашиваются через 12 тыс. км пробега, а задние — через 8 тыс. км пробега.

а) Какой наибольший путь может проехать «Антилопа-Гну», если Адам Козлевич догадается вовремя поменять задние колёса с передними?

б) На сколько процентов при этом увеличится пробег автомобиля по сравнению с 8 тыс. км?

РЕШЕНИЕ. а) Если бы задние колёса меняли с передними через каждую тысячу километров, то на 2 тыс. км расходовалось бы $\frac{1}{12}+\frac{1}{8}=\frac{5}{24}$ ресурса каждого колеса. Следовательно, 2 тыс. км составляют $\frac{5}{24}$ наибольшего пути, который равен $2:\frac{5}{24}=9{,}6$ тыс. км.

б) Пробег автомобиля по сравнению с 8 тыс. км увеличится на $\dfrac{(9{,}6-8)\cdot 100\,\%}{8}=20\,\%$.

ОТВЕТ: а) 9,6 тыс. км; б) на $20\,\%$.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 20. Теплоход проплывал по экскурсионному маршруту 50 км по течению и 50 км против течения. Капитан теплохода знает, что обычного запаса топлива хватает, чтобы проплыть 150 км по течению реки или 100 км против течения.

а) На какое наибольшее расстояние теплоход может отплыть по реке с тем же запасом топлива, чтобы его хватило и на обратный путь?

б) На сколько процентов можно увеличить стоимость экскурсии, если она пропорциональна длине маршрута?

ЗАДАЧА 21. В кризис Иван Петрович не доверял банкам и хранил сбережения дома. Крупная сумма денег пролежала дома с зимы до лета. За это время цены на товары выросли в среднем на 50%. На сколько процентов уменьшилась покупательная способность отложенных денег?

РЕШЕНИЕ. Пусть зимой на a р. можно было купить одну единицу товара. Летом этот товар стоил $a+0{,}5a=1{,}5a$ р., т. е. летом на те же a р. можно было купить $a:1{,}5a=\frac{2}{3}$ единицы того же товара. Это на $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ единицы товара, или на $33\frac{1}{3}\%$, меньше, чем зимой. Покупательная способность отложенных денег уменьшилась на $33\frac{1}{3}\%$.

ОТВЕТ: на $33\frac{1}{3}\%$.

ЗАДАЧА 22. Василий Иванович является владельцем акций двух компаний. Стоимость приобретённых им акций компании *А* вдвое превышает стоимость акций компании *Б*. На сколько процентов увеличится общая стоимость акций Василия Ивановича, если цена акций компании *А* увеличится на 30%, а цена акций компании *Б* увеличится на 60%?

РЕШЕНИЕ. Пусть у Василия Ивановича имеется акций компании *Б* на x р. и акций компании *А* на $2x$ р., всего на $3x$ р. После увеличения цен акций они будут стоить $1{,}6\cdot x+1{,}3\cdot 2x=4{,}2x$ (р.) Таким образом, стоимость акций увеличится на $\frac{(4{,}2x-3x)\cdot 100\%}{3x}=40\%$.

ОТВЕТ: на 40%.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 23. Иван Васильевич является владельцем акций двух компаний. Стоимость приобретённых им акций компании *А* в четыре раза превышает стоимость акций компании *Б*. На сколько процентов увеличится общая стоимость акций Ивана Васильевича, если цена акций компании *А* увеличится на 50%, а цена акций компании *Б* увеличится на 25%?

ЗАДАЧА 24. За некоторый промежуток времени цена условной денежной единицы в рублях увеличилась на 25%. На сколько процентов при этом уменьшилась цена рубля в условных денежных единицах?

РЕШЕНИЕ. Пусть 1 условная денежная единица стоила n р., тогда 1 р. стоил $\frac{1}{n}$ условных денежных единиц. После увеличения цены условной денежной единицы в рублях на 25% она стала стоить $\frac{5n}{4}$ р., и теперь 1 р. стоит $1:\frac{5n}{4}=\frac{4}{5n}$ условных денежных единиц. Стоимость 1 р. в условных денежных единицах при этом уменьшилась на $\frac{1}{5}$ от $\frac{1}{n}$ условной денежной единицы, или на 20%.

ОТВЕТ: на 20%.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 25. В некотором царстве, в некотором государстве цена 1 единицы местной валюты в червонцах уменьшилась на 50%. На сколько процентов при этом увеличилась цена червонца в единицах местной валюты?

ЗАДАЧА 26. При увеличении производительности труда рабочего на 25% его зарплату увеличили на 20%. На сколько процентов снизился расход на оплату труда в расчёте на единицу продукции?

РЕШЕНИЕ. Пусть за изготовление a деталей рабочий получал b р. На 1 деталь приходилось $\frac{b}{a}$ р. Увеличив производительность труда на 25%, рабочий сделал $1{,}25a$ деталей и получил за них $1{,}2b$ р. Теперь на 1 деталь приходится $\frac{1{,}2b}{1{,}25a} = 0{,}96 \cdot \frac{b}{a}$ р. — это на 4% меньше, чем $\frac{b}{a}$ р.

ОТВЕТ: на 4%.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 27. Рабочий повысил производительность труда на 40%. При этом его зарплата увеличилась на 26%. На сколько процентов уменьшился расход на оплату труда в расчёте на единицу продукции?

ЗАДАЧА 28. Магазин выставил на продажу товар с наценкой 40% от закупочной цены. После продажи 0,75 всего товара магазин снизил назначенную цену на 40 % и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

Оценка выгодности условий

ЗАДАЧА 29. По вкладу A банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу $Б$ — увеличивает на 11% в течение каждого года из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу $Б$, при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада A.

РЕШЕНИЕ. Проведём сравнение условий двух вкладов для одной и той же суммы a р. (далее все вычисления приведены в рублях).

За три года на вкладе A сумма a превратится в $1{,}1^3a$.

За три года на вкладе $Б$ сумма a превратится в $1{,}11^2 \cdot \left(1+\frac{n}{100}\right)a$, где n — целое число процентов за третий год по вкладу $Б$.

Чтобы вклад $Б$ был выгоднее вклада A, должно выполняться следующее неравенство:

$$1{,}11^2 \cdot \left(1+\frac{n}{100}\right)a > 1{,}1^3a.$$

Разделив неравенство на положительное число a, получим неравенство, равносильное предыдущему:

$$1{,}11^2 \cdot \left(1+\frac{n}{100}\right) > 1{,}1^3. \qquad (1)$$

Требуется найти наименьшее целое число n, для которого неравенство (1) верно. Будем уменьшать n от 11.

При $n=9$ неравенство (1) верно, так как $1{,}11^2 \cdot 1{,}09 = 1{,}134\ldots > 1{,}331$.

При $n=8$ неравенство (1) неверно, так как $1{,}11^2 \cdot 1{,}08 = 1{,}1330\ldots < 1{,}331$.

Следовательно, наименьшее целое значение n, при котором за три года хранения вклад $Б$ окажется выгоднее вклада A, равно 9.

ОТВЕТ: 9.

ЗАДАЧА 30. По вкладу A банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу $Б$ — увеличивать эту сумму на 5% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад $Б$ окажется выгоднее вклада A при одинаковых суммах первоначальных взносов.

РЕШЕНИЕ. Проведём сравнение условий двух вкладов для одной и той же суммы a р. (далее все вычисления приведены в рублях).

За три года на вкладе A сумма a превратится в $1{,}1^3a$.

За три года на вкладе $Б$ сумма a превратится в $1{,}05 \cdot \left(1+\frac{n}{100}\right)^2 a$, где n — целое число процентов и за второй, и за третий годы.

Чтобы вклад $Б$ был выгоднее вклада A, должно выполняться следующее неравенство:

$$1{,}05 \cdot \left(1+\frac{n}{100}\right)^2 a > 1{,}1^3a.$$

Разделив неравенство на положительное число a, получим неравенство, равносильное предыдущему:

$$1{,}05\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)^2>1{,}1^3. \qquad (2)$$

Требуется найти наименьшее целое число n, для которого неравенство (2) верно.

При $n=12$ неравенство (2) неверно, так как $1{,}05\cdot1{,}12^2=1{,}31...<1{,}331$.

При $n=13$ неравенство (2) верно, так как $1{,}05\cdot1{,}13^2=1{,}34...>1{,}331$.

Следовательно, наименьшее целое значение n, при котором за три года хранения вклад $Б$ окажется выгоднее вклада $А$, равно 13.

ОТВЕТ: 13.

Давайте перенесёмся в 1993 г., в период бурного роста цен и больших процентных ставок по вкладам, с которыми связана интересная задача.

Сбербанк России с 1 октября 1993 г. за хранение денег на депозитном вкладе в течение года, 6 и 3 месяцев выплачивал доход в размере 150%, 130% и 120% годовых соответственно. При этом по вкладу на 6 месяцев можно было получить $\frac{130\%}{2}=65\ \%$ дохода, а по вкладу на 3 месяца можно было получить $\frac{120\%}{4}=30\%$ дохода.

Расчёты показывают, что если вложить a р. на 6 месяцев, полученную сумму вложить ещё на 6 месяцев, то за год можно было получить на счёте $a\cdot(1{,}65)^2=2{,}7225a$ р., что даёт доход в

$$\frac{(2{,}7225a-a)\cdot100\%}{a}=172{,}25\%.$$

Если же вложить a р. на 3 месяца, полученную сумму увеличить ещё 3 раза по 3 месяца, то за год можно было получить на счёте $a\cdot(1{,}3)^4=2{,}8561a$ р., что даёт доход в

$$\frac{(2{,}8561a-a)\cdot100\%}{a}=185{,}61\%.$$

Тот и другой результат заметно больше 150% годовых. Таким образом, вкладчики имели возможность получить выигрыш за счёт более выгодного использования условий Сбербанка России.

Описанная ситуация поставила естественную задачу, которую нужно было бы решить руководству Сбербанка России, если бы оно считало нежелательным многократное использование клиентами вкладов на 3 и 6 месяцев при заданной процентной ставке для вкладов на 1 год. Заметим, что наши расчёты имеют чисто теоретический характер, так как на принятие решения о величине процентной ставки по вкладам могут влиять самые разные причины. Сформулируем задачу в общем виде.

ЗАДАЧА 31. Каким наибольшим целым числом x должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший, чем вклад на 1 год под $p\%$ годовых? Каким наибольшим целым числом y должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший, чем вклад на 6 месяцев? Найдите x и y, если $p=150$.

РЕШЕНИЕ. Пусть в начале года положили a р. под $p\%$ годовых. В конце года получат $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ р. Если бы положили a р. под $x\%$ годовых на 6 месяцев, полученную через полгода сумму, увеличенную на $\frac{x}{2}\%$, ещё раз положили на 6 месяцев, то в конце года получили бы $a\left(1+\frac{\frac{x}{2}}{100}\right)^2$ р. По условию задачи первый результат должен быть больше второго, т. е. должно выполняться неравенство

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)>a\left(1+\frac{\frac{x}{2}}{100}\right)^2,$$

которое перепишем в виде

$$x^2+400x-400p<0. \qquad (3)$$

Вычислим корни квадратного трёхчлена:

$$\frac{D}{4}=40\,000+400p=400(100+p);$$

$$x_1=-200-20\sqrt{p+100},\ x_2=-200+20\sqrt{p+100}.$$

Решения неравенства (3) составляют промежуток

$$-200-20\sqrt{p+100}<x<-200+20\sqrt{p+100}. \qquad (4)$$

При $p=150$ имеем

$$x<-200+20\sqrt{p+100}=-200+20\sqrt{250}\approx 116{,}2\ldots,$$

откуда наибольшее целое значение $x_{\text{наиб.}}=116$.

Проверим полученный результат. Двукратное вложение денег на 6 месяцев под $116\,\%$ годовых увеличит вклад в $\left(1+\frac{\frac{116}{2}}{100}\right)^2\approx 2{,}49$ раза, т. е. меньше чем на $150\,\%$, а под $117\,\%$ годовых увеличит вклад в $\left(1+\frac{\frac{117}{2}}{100}\right)^2\approx 2{,}51$ раза, т. е. больше чем на $150\,\%$.

Пусть теперь известна процентная ставка x по вкладам на 6 месяцев. Определим наибольшее целое число y, которым должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший $x\,\%$.

Дальше можно полностью повторить рассуждения по приведённой выше схеме или получить результат из неравенства (5) подстановкой $p=\frac{x}{2}$, $x=\frac{y}{2}$:

$$-200-20\sqrt{\frac{x}{2}+100}<\frac{y}{2}<-200+20\sqrt{\frac{x}{2}+100},$$

откуда получим

$$-400-20\sqrt{2x+400}<y<-400+20\sqrt{2x+400}. \qquad (5)$$

При $x=116$ имеем

$$y<-400+20\sqrt{232+400}=-400+20\sqrt{632}\approx 102{,}7\ldots,$$

следовательно, наибольшее целое значение $y_{\text{наиб.}}=102$.

Проверка показывает, что двукратное вложение денег на 3 месяца под $102\,\%$ годовых увеличит вклад в $\left(1+\frac{\frac{102}{4}}{100}\right)^2\approx 1{,}575$ раза, т. е. меньше чем на $\frac{116\,\%}{2}=58\,\%$, а под 103 % годовых увеличит вклад в $\left(1+\frac{\frac{103}{4}}{100}\right)^2 \approx 1{,}581$ раза, т. е. больше чем на 58 %.

Таким образом, мы получили неравенства (4) и (5), с помощью которых по заданному проценту p для депозитных вкладов на 1 год можно вычислить процент годовых x для вкладов на 6 месяцев, а по нему — процент годовых y для вкладов на 3 месяца. При указанных процентах x и y многократное использование вкладов на 6 и 3 месяца вместо одного вклада на 1 год становится невыгодным.

ОТВЕТ: $x = 116$, $y = 102$.

Отметим, что не прошло и года, как приведённые выше процентные ставки по депозитным вкладам Сбербанка России были изменены. Интересно не то, что они уменьшились, тем более не то, что это случилось после публикации решения этой задачи в журнале «Квант» (это, разумеется, совпадение), а то, что новые процентные ставки (70 %, 60 % и 50 % для депозитных вкладов на год, 6 и 3 месяца соответственно) удовлетворяли неравенствам (4) и (5), чем и лишили дополнительного дохода наиболее сообразительных вкладчиков Сбербанка России.

Прочитав приведённое выше уж очень «взрослое» решение, наш читатель вполне может высказаться об авторе книги словами Дашеньки из пьесы А. П. Чехова «Свадьба»: «Они хочут свою образованность показать и всегда говорят о непонятном». Для самооправдания автору придётся показать и «детское» решение похожей задачи методом обоснованного перебора целых значений.

ЗАДАЧА 32. В некотором царстве, в некотором государстве ставка для депозитных вкладов на 1 год равна 100 %. Каким наибольшим целым числом x должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший, чем вклад на 1 год под 100 % годовых? Каким наибольшим целым числом y должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший, чем вклад на 6 месяцев?

РЕШЕНИЕ. За год вклад a червонцев (расчёты ведутся в валюте этого царства-государства) под 100 % годовых обратится в сумму $2a$, т. е. увеличится в 2 раза. Проверим несколько целых значений годовой процентной ставки x % на 6 месяцев. За этот срок вклад увеличится на $\frac{x}{2}$ %, или в $\left(1+\frac{\frac{x}{2}}{100}\right)$ раза.

Если $x = 70$, то за два срока по полгода вклад увеличится в $\left(1+\frac{\frac{70}{2}}{100}\right)^2 \approx 1{,}8$ раза, т. е. меньше чем в 2 раза. Следующие вычисления запишем короче:

если $x = 80$, то вклад увеличится в $\left(1+\frac{\frac{80}{2}}{100}\right)^2 = 1{,}96$ раза;

если $x = 82$, то вклад увеличится в $\left(1+\frac{\frac{82}{2}}{100}\right)^2 = 1{,}9881$ раза;

если $x = 83$, то вклад увеличится в $\left(1+\frac{\frac{83}{2}}{100}\right)^2 > 2{,}0023$ раза.

Наименьшее целое значение x равно 82.

За 6 месяцев при ставке 82% годовых вклад увеличится на 41%, т. е. в 1,41 раза. Проверим несколько целых значений годовой процентной ставки $y\%$ на 3 месяца. За этот срок вклад увеличится на $\frac{y}{4}\%$, или в $\left(1+\frac{\frac{y}{4}}{100}\right)$ раз.

Если $y = 72$, то за два срока по четверть года вклад увеличится в $\left(1+\frac{\frac{72}{4}}{100}\right)^2 \approx 1{,}39$ раза, т. е. меньше чем в 1,41 раза. Следующие вычисления запишем короче:

если $y = 74$, то вклад увеличится в $\left(1+\frac{\frac{74}{4}}{100}\right)^2 \approx 1{,}40...$ раза;

если $x = 75$, то вклад увеличится в $\left(1+\frac{\frac{75}{4}}{100}\right)^2 > 1{,}41$ раза.

Наименьшее целое значение y равно 74.

ОТВЕТ: $x = 82$, $y = 74$.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 33. В некотором царстве, в некотором государстве ставка для депозитных вкладов на 1 год равна 80%. Каким наибольшим целым числом x должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший, чем вклад на 1 год под 80% годовых?

Каким наибольшим целым числом y должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший, чем вклад на 6 месяцев?

ЗАДАЧА 34. В июле планируют взять кредит на сумму 4 026 000 р. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?

РЕШЕНИЕ. Пусть $a = 4\,026\,000$ р. и пусть при погашении кредита за 2 года ежегодная выплата составляет x р. (далее вычисления ведутся в рублях). Составим первое уравнение:

$$1{,}2(1{,}2a - x) - x = 0,$$

решив которое относительно x получим

$$x = \frac{1{,}44 \cdot 4\,026\,000}{2{,}2},$$

$$x = 2\,635\,200.$$

Пусть при погашении кредита за 4 года ежегодная выплата составляет y. Составим второе уравнение:

$$1{,}2(1{,}2(1{,}2(1{,}2a - y) - y) - y) - y = 0,$$

$$1{,}2^4a - 1{,}2^3y - 1{,}2^2y - 1{,}2y - y = 0,$$

решив которое относительно y получим

$$y = \frac{2{,}0736 \cdot 4\,026\,000}{5{,}368},$$

$$y = 1\,555\,200.$$

Если кредит будет полностью погашен за 4, а не за 2 года, то придётся отдать больше на $4y - 2x = 4 \cdot 1\,555\,200 - 2 \cdot 2\,635\,200 = 950\,400$ р.

ОТВЕТ: на 950 400 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 35. В июле планируют взять кредит на сумму 4 641 000 р. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 10 % по сравнению с концом прошлого года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?

Проекты с дополнительным вложением средств

ЗАДАЧА 36. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн р. По итогам каждого года планируют прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн р. в первый и второй годы, а также целое число m млн р. в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

РЕШЕНИЕ. Первоначальными вложениями здесь названы 10 млн р. Рассмотрим изменения средств (в миллионах рублей), вложенных в проект, за первые два года. В конце первого года сумма 10 увеличилась в 1,15 раза и к ней прибавили n. В конце второго года те же действия выполнили с суммой $11{,}5+n$.

Год	Сумма в начале года	Сумма в конце года
1-й	10	$1{,}15\cdot 10+n=11{,}5+n$
2-й	$11{,}5+n$	$1{,}15(11{,}5+n)+n=13{,}225+2{,}15n$

Так как первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, то верно неравенство

$$13{,}225+2{,}15n\geqslant 20,$$

$$2{,}15n\geqslant 6{,}775. \qquad (1)$$

Так как n — число целое и при $n=3$ неравенство (1) неверно, а при $n=4$ верно, то наименьшее целое число n, для которого неравенство (1) верно, равно 4.

Продолжим заполнение таблицы согласно условиям задачи для 3-го и 4-го годов, учитывая, что $n=4$.

Год	Сумма в начале года	Сумма в конце года
3-й	21,825	$1{,}15\cdot 21{,}825+m$
4-й	$1{,}15\cdot 21{,}825+m$	$1{,}15(1{,}15\cdot 21{,}825+m)+m$

Так как первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся, то верно неравенство

$$1{,}15(1{,}15\cdot 21{,}825+m)+m\geqslant 30,$$

$$1{,}3225\cdot 21{,}825+2{,}15m\geqslant 30. \qquad (2)$$

Так как m — число целое и при $m=0$ неравенство (2) неверно, а при $m=1$ верно, то наименьшее целое число m, для которого неравенство (2) верно, равно 1.

ОТВЕТ: $n=4$ млн р., $m=1$ млн р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 37. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн р. По итогам каждого года планируют прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн р. в первый и второй годы, а также целое число m млн р. в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум увеличатся в 4 раза.

ЗАДАЧА 38. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируют прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн р. в первый и второй годы, а также по 10 млн р. в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн р., а за четыре года станут больше 250 млн р.

РЕШЕНИЕ. Пусть первоначальные вложения составили целое число — x млн р. В конце первого года сумма x увеличилась в 1,2 раза и к ней прибавили 20 (все расчёты приводятся в миллионах рублей). В конце второго года те же действия выполнили с суммой $1{,}2x+20$.

Год	Сумма в начале года	Сумма в конце года
1-й	x	$1{,}2x+20$
2-й	$1{,}2x+20$	$1{,}2(1{,}2x+20)+20=1{,}44x+44$

Так как первоначальные вложения за два года стали больше 150, то верно неравенство

$$1{,}44x+44>150,$$

$$x>73{,}6\ldots\ . \qquad (1)$$

Продолжим заполнение таблицы согласно условиям задачи для 3-го и 4-го годов.

Год	Сумма в начале года	Сумма в конце года
3-й	$1{,}44x+44$	$1{,}2(1{,}44x+44)+10=1{,}728x+62{,}8$
4-й	$1{,}728x+62{,}8$	$1{,}2(1{,}728x+62{,}8)+10=2{,}0736x+85{,}36$

Так как первоначальные вложения за четыре года стали больше 250 млн р., то верно неравенство

$$2{,}0736x+85{,}36>250,$$

$$x>79{,}3982. \qquad (2)$$

Наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенствам (1) и (2), равно 80. Следовательно, наименьший размер первоначальных вложений составил 80 млн р.

ОТВЕТ: 80 млн р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 39. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируют прирост средств вкладчика на 10% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 10 млн р. в первый и второй годы, а также по 20 млн р. в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 140 млн р., а за четыре года станут больше 212 млн р.

От задач, решение которых требовало простых вычислений и процентных расчётов, мы переходим к задачам, для решения которых требуется находить наибольшее или наименьшее значение функции.

Напомним, что на множестве $\boldsymbol{R}$ функция $y = ax^2 + bx + c$ достигает:

— наименьшего значения при $a > 0$;

— наибольшего значения при $a < -0$

в точке $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Это значение равно $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$, или $y_0 = \frac{-D}{4a}$, где $D = b^2 - 4ac$.

Прибыль и квадратичная функция

ЗАДАЧА 40. Строительство нового завода оценивается в 78 млн р. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+2x+6$ млн р. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. р. за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $px-(0{,}5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

РЕШЕНИЕ. Прибыль фирмы за один год (в млн рублей) составит

$$px-(0{,}5x^2+2x+6)=-0{,}5x^2+(p-2)x-6.$$

Квадратичная функция

$$y=-0{,}5x^2+(p-2)x-6 \qquad (1)$$

достигает наибольшего значения в точке $x=p-2$, следовательно, прибыль за год будет наибольшей, если $x=p-2$. Эта наибольшая прибыль равна

$$-0{,}5(p-2)^2+(p-2)^2-6=0{,}5(p-2)^2-6,$$

а за 3 года наибольшая прибыль составит $1{,}5(p-2)^2-18$.

Найдём наименьшее значение p, при котором верно неравенство

$$1{,}5(p-2)^2-18\geqslant 78,$$

$$1{,}5(p-2)^2\geqslant 96,$$

$$(p-2)^2\geqslant 64.$$

Так как случай $p-2\leqslant -8$ не отвечает условиям задачи, то $p-2\geqslant 8$, $p\geqslant 10$. Следовательно, строительство завода окупится не более чем за 3 года при наименьшем значении $p=10$.

ОТВЕТ: 10.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 41. Строительство нового завода оценивается в 42 млн р. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+4x+2$ млн р. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. р. за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $px-(0{,}5x^2+4x+2)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

ЗАДАЧА 42. Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в рублях за штуку) выражается формулой $Q=15\,000-P$, $1000\leqslant P\leqslant 15\,000$. Доход от продажи товара составляет PQ р. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q+5\,000\,000$ р. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Согласно условиям задачи доход равен $PQ = P(15\,000 - P) = -P^2 + 15\,000P$, а затраты на производство Q единиц продукции составляют

$$Z = 3000Q + 5\,000\,000 = 3000(15\,000 - P) + 5\,000\,000 = 50\,000\,000 - 3000P$$

(все расчёты ведутся в рублях).

Прибыль равна

$$PQ - Z = -P^2 + 15\,000P - 50\,000\,000 + 3000P = \\ = -P^2 + 18\,000P - 50\,000\,000 = -(P - 9000)^2 + 31\,000\,000. \quad (2)$$

Как видим, прибыль выражается квадратичной функцией от аргумента P, она достигает наибольшего значения, если $P = 9000$.

В результате снижения начальной цены P на 20 % она стала равной $0{,}8P$. Проведя аналогичные вычисления для цены $0{,}8P$ или подставив $0{,}8P$ вместо P в формулу (2) для вычисления прибыли, мы получим, что прибыль для сниженной цены равна

$$-(0{,}8P - 9000)^2 + 31\,000\,000.$$

Согласно условиям задачи прибыль не изменилась. Составим уравнение

$$-(P - 9000)^2 + 31\,000\,000 = -(0{,}8P - 9000)^2 + 31\,000\,000,$$

$$(P - 9000)^2 = (0{,}8P - 9000)^2,$$

откуда получим, что $P = 0$ или $P = 10\,000$. Условиям задачи отвечает лишь второй корень.

Итак, начальная цена P равна 10 000, после снижения на 20 % она стала равна $0{,}8P = 8000$. Цену 8000 надо повысить до 9000, чтобы прибыль была наибольшей, т. е. её надо увеличить на $\frac{(9000 - 8000) \cdot 100\,\%}{8000} = 12{,}5\,\%$.

2-й способ. Будем считать, что в приведённом выше решении прибыль выражается квадратичной функцией

$$y\,(x) = -x^2 + 18\,000x - 50\,000\,000 \quad (3)$$

от аргумента x (цена товара) и что с помощью этой функции формула (2) выражает прибыль $y\,(P) = -P^2 + 18\,000P - 50\,000\,000$ для значения $x = P$ первоначальной цены.

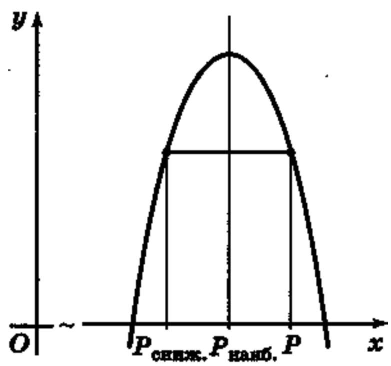

Рис. 1

График функции (3) — парабола, абсцисса вершины которой $x = 9000$ (рис. 1). Это и есть цена $P_{\text{наиб.}}$ товара, при которой достигается наибольшая прибыль. График симметричен относительно прямой $x = 9000$. По условию задачи цена P товара снижена на 20 %. Сниженная цена равна $P_{\text{сниж.}} = 0{,}8P$.

Прибыль, полученная при цене P, оказалась равной прибыли, полученной при цене $0{,}8P$, т. е. квадратичная функция (3) принимает одинаковые значения при $x = P$

и при $x=0{,}8P$. Это означает, что точки графика, соответствующие первоначальной цене товара $x=P$ и сниженной его цене $x=0{,}8P$, симметричны относительно прямой $x=9000$ (см. рис. 1). Тогда $P_{\text{наиб.}}=\dfrac{P+0{,}8P}{2}=0{,}9P$. Чтобы увеличить цену с $0{,}8P$ до $0{,}9P$, её надо увеличить на $\dfrac{(0{,}9P-0{,}8P)\cdot 100\,\%}{0{,}8P}=12{,}5\,\%$.

ОТВЕТ: на $12{,}5\,\%$.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 43. Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в рублях за штуку) выражается формулой $Q=5000-P$, $1000\leqslant P\leqslant 5000$. Доход от продажи товара составляет PQ р. Затраты на производство Q единиц товара составляют $4000Q+1\,000\,000$ р. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Во время рекламной акции фирма уменьшила цену продукции на 50 %, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует после рекламной акции увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

ЗАМЕЧАНИЕ. При решении задачи числа 5000, 4000 и 1 000 000 можно не использовать для получения ответа.

Кредиты с известными платежами

В 2015 г. в вариантах ЕГЭ по математике появились задачи про кредиты, требующие не столько знания математики, сколько умения выстраивать план решения задачи и вести аккуратные вычисления. В разных источниках, а иногда в одном в условиях некоторых задач одни и те же величины обозначаются разными буквами. На контрольной работе или экзамене это, видимо, не так мешает, так как ученик решает одну задачу, но в рамках одной книги лучше иметь одинаковые обозначения для разных задач. Сумму кредита мы обозначаем через a, процентную ставку платежа (выплаты) — через r.

НАХОЖДЕНИЕ СУММЫ КРЕДИТА (ВКЛАДА)

ЗАДАЧА 44. 15 июля 2012 г. взяли кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— 1 января каждого года долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит с февраля по июнь каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен двумя равными платежами по 4 548 600 р. (т. е. за два года). Какую сумму банк выдал в кредит?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме a тыс. р. (далее все суммы указаны в тысячах рублей). 1 января 2013 г. долг увеличился на 14 %, т. е. в 1,14 раза. После первой выплаты части долга остаток долга составил $a \cdot 1{,}14 - 4548{,}6$. После второй выплаты части долга расчёт был закончен. Составим уравнение

$$(a \cdot 1{,}14 - 4548{,}6) \cdot 1{,}14 - 4548{,}6 = 0.$$

Разделив уравнение на $1{,}14^2$, получим равносильное ему уравнение

$$a - 3990 - 3500 = 0,$$

имеющее единственный корень $a = 7490$, следовательно, кредит взят в сумме 7 490 000 р.

ОТВЕТ: 7 490 000 р.

ЗАДАЧА 45. В июле планируют взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн р.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

РЕШЕНИЕ. Пусть взято в кредит a р. (далее все суммы указаны в рублях). В январе сумма долга увеличится на 20 %, т. е. в 1,2 раза. Затем выплачивают банку $x = 2\,160\,000$, и за 3 года расчёты по кредиту будут завершены. Составим уравнение

$$1{,}2(1{,}2(1{,}2a - x) - x) - x = 0.$$

Раскрыв скобки в левой части уравнения, получим

$$1{,}2^3a - 1{,}2^2x - 1{,}2x - x = 0,$$

$$1{,}728a = 3{,}64x,$$

$$a = \frac{3{,}64 \cdot 2160\,000}{1{,}728}.$$

Осталось вычислить значение дроби

$$\frac{3{,}64 \cdot 2160\,000}{1{,}728} = 4\,550\,000.$$

Итак, в кредит было взято 4 550 000 р.

ОТВЕТ: 4 550 000 р.

ЗАДАЧА 46. Вклад планируют открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме того, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн р. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн р.

РЕШЕНИЕ. Пусть первоначальный вклад составляет целое число — a млн р. (далее все суммы указаны в миллионах рублей). Ежегодно вклад увеличивается в 1,1 раза — в каждой строке таблицы число из 2-го столбца умножили на 1,1. В начале 3-го и 4-го годов прибавили по 3 млн р.

Год	Вклад в начале года	Вклад в конце года
1-й	a	$1{,}1a$
2-й	$1{,}1a$	$1{,}1^2a$
3-й	$1{,}1^2a+3$	$1{,}1(1{,}1^2a+3)$
4-й	$1{,}1(1{,}1^2a+3)+3$	$1{,}1(1{,}1(1{,}1^2a+3)+3)$

Так как вклад после 4 лет должен быть меньше 25 млн р., то должно выполняться неравенство

$$1{,}1(1{,}1(1{,}1^2a+3)+3) < 25,$$

$$1{,}4641a < 18{,}07. \qquad (1)$$

Так как a — число целое, то нетрудно убедиться, что для $a = 12$ неравенство (1) выполняется, так как $17{,}5692 < 18{,}07$, а для $a = 13$ — не выполняется, так как $19{,}0333 > 18{,}07$. Следовательно, наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн р., составляет 12 млн р.

ОТВЕТ: 12 000 000 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 47. 31 декабря 2014 г. Василий взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита такова: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 11%), затем Василий переводит в банк 3 696 300 р. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (т. е. за два года)?

ЗАДАЧА 48. 31 декабря 2017 г. Полина взяла кредит в банке под 10% годовых. Схема выплаты кредита такова: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Полина переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Она знает, что ежегодно сможет выплачивать за кредит 1 000 000 р. Каким наибольшим целым числом миллионов рублей может выражаться сумма кредита, чтобы Полина выплатила долг тремя равными ежегодными платежами (сумма последнего платежа может быть меньше 1 000 000 р.)?

РЕШЕНИЕ. Пусть сумма кредита составила a млн р. (все расчёты указаны в миллионах рублей). Тогда остатки долга по годам составили:

1-й год — $1{,}1a-1$,

2-й год — $1{,}1(1{,}1a-1)-1=1{,}21a-2{,}1$,

3-й год — $1{,}1(1{,}21a-2{,}1)-1=1{,}331a-3{,}31$.

За три года расчёт по кредиту должен быть завершён, последний остаток не должен превышать 0, поэтому должно выполняться неравенство

$$1{,}331a-3{,}31\leqslant 0,$$

$$1{,}331a\leqslant 3{,}31. \qquad (2)$$

Так как a — число целое и при $a=2$ неравенство (2) верно, а при $a=3$ — неверно, то наибольшая сумма кредита в целое число миллионов рублей равна 2.

ОТВЕТ: 2 000 000 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 49. В июле 2018 г. взяли кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами и банку будет выплачено 311 040 р.?

ЗАДАЧА 50. В июле 2020 г. планируют взять кредит на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с предыдущим годом;

— с февраля по июнь нужно выплатить часть долга одним платежом.

Определите, какая сумма будет выплачена заёмщиком банку, если кредит был полностью погашен за 3 года тремя равными платежами и общая сумма выплат на 48 250 р. больше суммы взятого кредита.

ЗАДАЧА 51. 31 декабря 2017 г. Леонид взял кредит в банке под 20% годовых. Схема выплаты кредита такова: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Леонид переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Он знает, что ежегодно сможет выплачивать за кредит 2 000 000 р. Каким наибольшим целым числом миллионов рублей может выражаться сумма кредита, чтобы Леонид выплатил долг четырьмя равными ежегодными платежами (сумма последнего платежа может быть меньше 2 000 000 р.)?

НАХОЖДЕНИЕ ВРЕМЕНИ РАСЧЁТА ЗА КРЕДИТ

ЗАДАЧА 52. 1 января 2015 г. Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн р. в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1% на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное число месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. р.?

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Чтобы рассчитаться за кредит в наименьшее число месяцев, Александр Сергеевич должен каждый месяц выплачивать наибольшую возможную сумму, т. е. 275 тыс. р. (далее все суммы указаны в тысячах рублей). Тогда через месяц его долг увеличится на 1%, или в 1,01 раза, и составит $1100 \cdot 1{,}01 = 1111$. После выплаты платежа остаток долга составит $1111 - 275 = 836$. Запишем расчёты по месяцам:

через 1 месяц остаток долга составит $1100 \cdot 1{,}01 - 275 = 836$;
через 2 месяца остаток долга составит $836 \cdot 1{,}01 - 275 = 569{,}36$;
через 3 месяца остаток долга составит $569{,}36 \cdot 1{,}01 - 275 = 300{,}0536$;
через 4 месяца остаток долга составит $300{,}0536 \cdot 1{,}01 - 275 < 275$.

В конце пятого месяца Александр Сергеевич рассчитается за кредит, делая ежемесячные выплаты в размере не более 275 тыс. р.

Итак, минимальное число месяцев равно 5.

2-й способ. Вычисления в первом способе решения задачи громоздки, остаток долга на пятый месяц так мал, что возникает идея решить задачу не точными вычислениями, а с помощью оценок результатов. За 4 месяца Александр Сергеевич выплатит $275 \cdot 4 = 1100$ тыс. р., т. е. всю сумму кредита, и в пятый месяц ему останется выплатить проценты по кредиту. Оставшаяся сумма будет меньше чем

$$1100 \cdot 1{,}01^5 - 1100 < 1100 \cdot 1{,}1 - 1100 = 110 < 275 \text{ тыс. р.}$$

Поэтому 5 месяцев — это наименьший срок расчёта за кредит.

ОТВЕТ: 5 месяцев.

ЗАДАЧА 53. Оля хочет взять в кредит 100 000 р. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента составляет 10% годовых. На какое минимальное число лет Оля может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 р.?

РЕШЕНИЕ. Чтобы рассчитаться за кредит в наименьшее число лет, Оля должна каждый год выплачивать наибольшую возможную сумму, т. е. 24 тыс. р. (далее все суммы указаны в тысячах рублей). Тогда через год её долг увеличится на 10%, или в 1,1 раза, и составит $100 \cdot 1{,}1 = 110$. После выплаты платежа остаток долга составит $110 - 24 = 86$. Запишем расчёты по годам:

через 1 год остаток долга составит $110 - 24 = 86$;
через 2 года остаток долга составит $86 \cdot 1{,}1 - 24 = 70{,}6$;
через 3 года остаток долга составит $70{,}6 \cdot 1{,}1 - 24 = 53{,}66$;
через 4 года остаток долга составит $53{,}66 \cdot 1{,}1 - 24 = 35{,}026$;
через 5 лет остаток долга составит $35{,}026 \cdot 1{,}1 - 24 = 14{,}5286$.

Через 6 лет Оля рассчитается за кредит, выплатив меньше 24 тыс. р., так как $14{,}5286 \cdot 1{,}1 < 24$.

Итак, минимальное число лет — 6.

ОТВЕТ: 6 лет.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 54. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн р. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента составляет 10 % годовых. На какое минимальное число лет Тимофей может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тыс. р.?

ЗАДАЧА 55. 15 января планируют взять кредит в банке на сумму 1,1 млн р. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого следующего месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 30-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное число месяцев возможно взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 137,5 тыс. р.?

ЗАДАЧА 56. 15 января планируют взять кредит в банке на сумму 1,2 млн р. Условия его возврата таковы:

— 1-го января каждого года долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

На какое минимальное число лет возможно взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тыс. р.?

ЗАДАЧА 57. 15 января 2012 г. банк выдал кредит на сумму 1 млн р. Условия его возврата таковы:

— 1 января каждого года долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит в январе каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен за два года, и при этом в первый год была переведена сумма 600 тыс. р., а во второй год — 550 тыс. р. Найдите r.

РЕШЕНИЕ. 1 января каждого года долг возрастает на $r\%$, т. е. в b раз, где $b = 1 + \frac{r}{100}$. После первой выплаты части долга остаток долга составил $1000 \cdot b - 600$ (здесь и далее все суммы указаны в тысячах рублей). После второй выплаты части долга расчёт был закончен. Составим уравнение

$$(1000b - 600) \cdot b - 550 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень 1,1, следовательно, $1 + \frac{r}{100} = 1{,}1$, откуда получим, что $r = 10$.

ОТВЕТ: 10.

ЗАДАЧА 58. 15 января планируют взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— 1 января каждого года долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

Если каждый год переводить в банк по 2 073 600 р., то кредит можно выплатить за 4 года. Если переводить по 3 513 600 р., то кредит можно выплатить за 2 года. Найдите r.

РЕШЕНИЕ. Пусть в кредит взяли a млн р. (далее все суммы указаны в миллионах рублей). При начислении процентов остаток долга увеличивается в b раз, где $b = 1 + \frac{r}{100}$. Составим уравнение для расчёта за 2 года:

$$(ba - 3{,}5136)b - 3{,}5136 = 0,$$

из которого, учитывая, что $b \neq 0$, выразим a через b:

$$a = \frac{3{,}5136(b+1)}{b^2}.$$

Обозначив $c = 2{,}0736$, составим уравнение для расчёта за 4 года:

$$(((ba - c)b - c)b - c)b - c = 0. \qquad (1)$$

Упростим уравнение (1):

$$b^4a - b^3c - b^2c - bc - c = 0. \qquad (2)$$

Теперь, подставив $\frac{3{,}5136(b+1)}{b^2}$ вместо a, перепишем уравнение (2) в виде

$$\frac{3{,}5136(b+1)b^4}{b^2} - b^3c - b^2c - bc - c = 0,$$

$$3{,}5136(b+1)b^2 - b^2c(b+1) - c(b+1) = 0. \qquad (3)$$

Так как по смыслу задачи $b > 0$, то $b + 1 \neq 0$ и уравнение (3) равносильно уравнению

$$3{,}5136b^2 - b^2c - c = 0. \qquad (4)$$

Из уравнения (4) вычислим b^2, учитывая, что $c = 2{,}0736$:

$$b^2 = \frac{c}{3{,}5136 - c} = \frac{2{,}0736}{3{,}5136 - 2{,}0736} = 1{,}44.$$

Так как $b > 0$, то $b = 1{,}2$, следовательно, $r = 20$.

ОТВЕТ: 20.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 59. 31 декабря 2014 г. Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита такова: 31 декабря каждого следующего месяца банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на r%), затем Олег переводит очередной транш. Если каждый год он будет платить по 328 050 р., то выплатит долг за 4 года. Если он будет платить по 587 250 р., то выплатит за 2 года. Найдите r.

ЗАДАЧА 60. В июле 2016 г. взяли кредит в размере 4,2 млн р. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

— в июле 2017, 2018 и 2019 гг. долг остаётся равным 4,2 млн р.;

— суммы выплат в 2020 и 2021 гг. равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн р.

РЕШЕНИЕ. Пусть ежегодно долг увеличивается в b раз, где $b = 1 + \frac{r}{100}$. Так как первые три года остаток долга года остаётся неизменным и равным сумме кредита в 4,2 млн р., то и платежи в первые три года будут одинаковыми — по x млн р. Платежи в два последних года будут равными — по y млн р. Начисление процентов, ежегодные платежи и остатки долга (в миллионах рублей) отразим в таблице.

Год	Долг на 01.01	Платёж	Остаток долга
2017	$4{,}2b$	x	4,2
2018	$4{,}2b$	x	4,2
2019	$4{,}2b$	x	4,2
2020	$4{,}2b$	y	$4{,}2b - y$
2021	$(4{,}2b - y)b$	y	$(4{,}2b - y)b - y$

Из расчётов за 2017 г. составим уравнение

$$4{,}2b - x = 4{,}2,$$

откуда выразим x через b:

$$x = 4{,}2(b - 1).$$

Остаток долга в 2021 г. будет равен 0. Составим второе уравнение:

$$(4{,}2b - y)b - y = 0.$$

Учитывая, что $b + 1 \neq 0$, выразим y через b:

$$y = \frac{4{,}2b^2}{b+1}.$$

Наконец, сумма всех платежей по кредиту составит 6,1 млн р. Составим уравнение

$$3x + 2y = 6{,}1. \qquad (5)$$

Подставив в уравнение (5) $4{,}2(b-1)$ вместо x и $\frac{4{,}2b^2}{b+1}$ вместо y, получим уравнение

$$12{,}6(b-1) + \frac{8{,}4b^2}{b+1} = 6{,}1. \qquad (6)$$

Решив уравнение (6) относительно b, получим его единственный положительный корень $b = 1{,}1$. Из равенства $1 + \frac{r}{100} = 1{,}1$ получим $r = 10$.

ОТВЕТ: 10.

Кредиты с неизвестными платежами

ЗАДАЧА 61. Планируют выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1, 2 и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн р.

РЕШЕНИЕ. Пусть сумма кредита в начале первого года составляла целое число, равное a млн р. Ежегодно вклад увеличивается в 1,2 раза. В конце 1, 2 и 3-го годов выплатили только проценты: $1{,}2a - a = 0{,}2a$. В конце 4-го и 5-го годов были одинаковые выплаты — по x млн р. Все выплаты отражены в таблице (все суммы приведены в миллионах рублей).

Год	Долг в начале года	Долг в середине года	Выплата в конце года
1-й	a	$1{,}2a$	$0{,}2a$
2-й	a	$1{,}2a$	$0{,}2a$
3-й	a	$1{,}2a$	$0{,}2a$
4-й	a	$1{,}2a$	x
5-й	$1{,}2a - x$	$1{,}2(1{,}2a - x)$	x

Расчёт по кредиту завершён в конце пятого года. Составим уравнение

$$1{,}2(1{,}2a - x) = x,$$

единственный корень которого $x = \frac{36a}{55}$.

Чтобы общая сумма выплат заёмщика превысила 10 млн р., должно выполняться неравенство

$$0{,}6a + 2x > 10,$$

$$0{,}3a + x > 5. \qquad (1)$$

Подставив $\frac{36a}{55}$ вместо x в неравенство (1), получим

$$0{,}3a + \frac{36a}{55} > 5,$$

$$21a > 110. \qquad (2)$$

Число a целое; при $a = 5$ неравенство (2) неверно, а при $a = 6$ — верно, следовательно, наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн р., составляет 6 млн р.

ОТВЕТ: 6 000 000 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 62. Вадим планирует взять льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг Вадима возрастает на 10% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов Вадим выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3, 4 и 5-го годов Вадим выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат Вадима не превысит 6 млн р.

ЗАДАЧА 63. 31 декабря 2014 г. Дмитрий взял в банке 4 290 000 р. в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк x р. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме $a = 4\,290\,000$ р. (далее все суммы указаны в рублях). Через год (31 декабря 2015 г.) сумма долга увеличится на 14,5%, т. е. в 1,145 раза. Затем Дмитрий переведёт банку x р., и его долг составит $1{,}145a - x$. Далее заполним в таблице второй и третий столбцы: долг на 31 декабря текущего года и остаток долга после платежа.

Год	Долг на 31 декабря	Остаток долга после платежа
0-й	a	
1-й	$1{,}145a$	$1{,}145a - x$
2-й	$1{,}145(1{,}145a - x)$	$1{,}145(1{,}145a - x) - x$

Так как после второго платежа остаток долга равен нулю, то остаётся решить уравнение, заменив в нём a на 4 290 000:

$$1{,}145(1{,}145a - x) - x = 0.$$

Это уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{1{,}145^2 \cdot 4\,290\,000}{2{,}145},$$

$$x = 2\,622\,050,$$

т. е. сумма x должна быть равна 2 622 050 р.

ОТВЕТ: 2 622 050 р.

ЗАДАЧА 64. 31 декабря 2013 г. Сергей взял в банке 9 930 000 р. в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

РЕШЕНИЕ. Обозначим $a = 9\,930\,000$ (все расчёты приведены в рублях). Пусть в каждом году из трёх лет платёж составлял x р. Тогда остатки долга по годам составили:

1-й год — $1{,}1a - x$;

2-й год — $1{,}1(1{,}1a - x) - x$;

3-й год — $1{,}1(1{,}1(1{,}1a - x) - x) - x = 1{,}331a - 3{,}31x$.

Так как за три года расчёт по кредиту завершён, то верно равенство

$$1{,}331a - 3{,}31x = 0,$$

из которого получим, что

$$x = \frac{1{,}331 \cdot 9\,930\,000}{3{,}31} = 3\,993\,000.$$

Итак, сумма ежегодного платежа должна быть равна 3 993 000 р.

ОТВЕТ: 3 993 000 р.

ЗАДАЧА 65. В июле планируют взять кредит на сумму 8 052 000 р. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме $a = 8\,052\,000$ р. (далее все суммы указаны в рублях). В январе сумма долга увеличится на 20%, т. е. в 1,2 раза. Затем переводят банку x р., и за 4 года расчёты по кредиту будут завершены. Составим уравнение

$$1{,}2(1{,}2(1{,}2(1{,}2a - x) - x) - x) - x = 0.$$

Раскрыв скобки в левой части уравнения, выразим x:

$$1{,}2^4a - 1{,}2^3x - 1{,}2^2x - 1{,}2x - x = 0,$$

$$1{,}2^4a = (1{,}2^3 + 1{,}2^2 + 1{,}2 + 1)x,$$

$$2{,}0736a = 5{,}368x,$$

$$x = 3\,110\,400.$$

Итак, чтобы кредит был полностью погашен за 4 года, нужно ежегодно платить по 3 110 400 р.

ОТВЕТ: 3 110 400 р.

ЗАДАЧА 66. 31 декабря 2014 г. Алексей взял в банке 6 902 000 р. в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита такова: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк x р. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме $a = 6\,902\,000$ р. (далее все суммы указаны в рублях). Через год сумма долга увеличится на 12,5%, т. е. в $1{,}125 = \frac{9}{8}$ раза. Затем Алексей переведёт банку x р., к 31 декабря 2015 г. его долг составит $\frac{9}{8}a - x$. Далее заполняем в таблице 2-й и 3-й столбцы: долг на 31 декабря текущего года и остаток долга после платежа.

Год	Долг на 31 декабря	Остаток долга после платежа
1-й	$\frac{9}{8}a$	$\frac{9}{8}a-x$
2-й	$\frac{9}{8}\left(\frac{9}{8}a-x\right)$	$\frac{9}{8}\left(\frac{9}{8}a-x\right)-x\frac{9^2}{8^2}a-\frac{17}{8}x$
3-й	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^2}{8^2}a-\frac{17}{8}x\right)$	$\frac{9}{8}\left(\frac{9^2}{8^2}a-\frac{17}{8}x\right)-x=\frac{9^3}{8^3}a-\frac{217}{8^2}x$
4-й	$\left(\frac{9^3}{8^3}a-\frac{217}{8^2}x\right)$	$\left(\frac{9^3}{8^3}a-\frac{217}{8^2}x\right)-x=\frac{9^4}{8^4}a-\frac{2465}{8^3}x$

Так как после четвёртого платежа остаток долга равен нулю, то остаётся решить уравнение

$$\frac{9^4\cdot a}{8^4}-\frac{2465}{8^3}x=0,$$

заменив в нём a на 6 902 000.

Это уравнение имеет единственный корень $x = 2\,296\,350$, т. е. сумма x должна быть равна 2 296 350 р.

ОТВЕТ: 2 296 350 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 67. 31 декабря Юлия планирует взять в банке кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита такова: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 20 %), затем Юлия выплачивает банку треть суммы кредита (последний платёж может быть меньше остальных). За сколько лет она рассчитается с банком?

Кредиты с равномерным уменьшением долга

НАХОЖДЕНИЕ СУММЫ КРЕДИТА (ПЛАТЕЖА)

Под равномерным уменьшением долга понимают такую организацию выплат долга по кредиту, при которой остаток долга уменьшается на одну и ту же величину при каждом платеже. Чтобы понять механизм сложных и запутанных вычислений, разберём решения простых задач.

ЗАДАЧА 68. 15 января планируют взять в кредит 6 млн р. на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Найдите сумму платежей за три последних месяца.

РЕШЕНИЕ. Пусть 15-го числа каждого месяца сумма долга, равная 6 млн р., уменьшается на одну и ту же величину. Так как она уменьшается до нуля за 6 месяцев, то за каждый месяц она уменьшается на 1 (все суммы указаны в миллионах рублей). Суммы долга на 15-е число записаны во 2-м столбце таблицы.

1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1 %, т. е. в 1,01 раза (3-й столбец таблицы). Со 2-го по 14-е число каждого месяца надо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 3-го столбца уменьшилась до суммы из 2-го столбца следующей строки.

В первый месяц надо уменьшить сумму долга с 6,06 до 5, т. е. платёж за 1-й месяц составил $6{,}06-5=1{,}06$, за 2-й — $5{,}05-4=1{,}05$, ..., за 6-й — $1{,}01-0=1{,}01$ (4-й столбец таблицы).

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг на 1-е число	Платёж
0	6	6,06	0
1	5	5,05	$6{,}06-5=1{,}06$
2	4	4,04	$5{,}05-4=1{,}05$
3	3	3,03	1,04
4	2	2,02	1,03
5	1	1,01	1,02
6	0	0	1,01

За три последних месяца надо заплатить $1{,}03+1{,}02+1{,}01=3{,}06$ (млн р.).

ОТВЕТ: 3 060 000 р.

ЗАДАЧА 69. В июле планируют взять кредит в банке на сумму 10 млн р. на 5 лет. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько миллионов рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

РЕШЕНИЕ. Пусть в июле каждого года сумма первоначального долга 10 млн р. уменьшается на одну и ту же величину — на 2 млн р. — пятую часть суммы первоначального долга (далее все суммы указаны в миллионах рублей). Запишем сумму остатка долга на июль каждого года во 2-й столбец таблицы. Каждый январь остаток долга возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года, т. е. в 1,1 раза (3-й столбец таблицы). Далее надо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 3-го столбца уменьшилась до суммы из 2-го столбца следующей строки.

В первый месяц надо уменьшить сумму долга с 11 до 8, т. е. платёж за 1-й месяц составил 3, за 2-й — 2,8, ..., за 5-й — 2,2 (4-й столбец таблицы).

Число прошедших лет	Долг на июль	Долг на январь	Платёж
1	10	11	3
2	8	8,8	2,8
3	6	6,6	2,6
4	4	4,4	2,4
5	2	2,2	2,2

Общая сумма выплат после погашения кредита составила

$$3 + 2{,}8 + 2{,}6 + 2{,}4 + 2{,}2 = 13 \text{ (млн р.)}.$$

ОТВЕТ: 13 000 000 р.

ЗАДАЧА 70. Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн р. на 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, т. е. на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернёт банку в течение первого года кредитования?

РЕШЕНИЕ. Пусть в конце каждого месяца сумма долга 1200 тыс. р. уменьшается на одну и ту же величину. Так как она уменьшается до нуля за 24 месяца, то за каждый месяц она уменьшается на 50 (все денежные суммы указаны в тысячах рублей). Суммы долга на конец каждого месяца записаны во 2-м столбце таблицы.

В конце каждого месяца эти суммы увеличиваются на 2%, т. е. в 1,02 раза (3-й столбец таблицы). Затем надо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 3-го столбца уменьшилась до суммы из 2-го столбца следующей строки.

В первый месяц надо уменьшить сумму долга с 1224 до 1150, т. е. платёж за 1-й месяц составил $1224-1150=74$, за 2-й — $1173-1100=73$, ..., за 12-й — 63 (4-й столбец таблицы).

Число прошедших месяцев	Долг на конец месяца	Долг на начало месяца	Платёж
0	1200	1224	0
1	1150	1173	74
2	1100	1122	73
3	1050	1071	72
...	...	...	...
11	650	663	64
12	600	720	63

В течение первого года кредитования Жанна вернёт банку

$$74+73+...+64+63=822 \text{ (тыс. р.)}.$$

ОТВЕТ: 822 000 р.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в таблице много строк и нет желания или времени все их заполнить, то очень важно научиться подмечать закономерность изменения чисел в одном столбце. Например, в каждой строке таблицы из только что решённой задачи сумма числа прошедших месяцев и платежа постоянна и равна $1+74=2+73=...=75$. Это наблюдение позволит на экзамене не заполнять все строки таблицы.

Сформулируем задачу, обратную задаче **68**.

ЗАДАЧА 71. 15 января планируют взять кредит в банке на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение трёх последних месяцев кредитования нужно вернуть банку 3,06 млн р. Какую сумму взяли в кредит?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме a млн р. (далее все суммы указаны в миллионах рублей). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 6 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $\frac{a}{6}$. Суммы долга на 15-е число записаны в 2-м столбце таблицы.

1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1%, т. е. в 1,01 раза (3-й столбец таблицы).

Со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 3-го столбца уменьшилась до суммы из 2-го столбца следующей строки (4-й столбец таблицы).

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг на 1-е число	Платёж
0	a	$1{,}01a$	0
1	$\frac{5a}{6}$	$\frac{5a}{6}\cdot 1{,}01=\frac{5{,}05a}{6}$	$1{,}01a-\frac{5a}{6}=\frac{1{,}06a}{6}$
2	$\frac{4a}{6}$	$\frac{4{,}04a}{6}$	$\frac{5{,}05a}{6}-\frac{4a}{6}=\frac{1{,}05a}{6}$
3	$\frac{3a}{6}$	$\frac{3{,}03a}{6}$	$\frac{1{,}04a}{6}$
4	$\frac{2a}{6}$	$\frac{2{,}02a}{6}$	$\frac{1{,}03a}{6}$
5	$\frac{a}{6}$	$\frac{1{,}01a}{6}$м	$\frac{1{,}02a}{6}$
6	0	0	$\frac{1{,}01a}{6}$

По условию задачи составим уравнение

$$\frac{1{,}03a}{6}+\frac{1{,}02a}{6}+\frac{1{,}01a}{6}=3{,}06$$

и найдём его единственный корень $a=6$.

Итак, в кредит взяли **6** млн р.

ОТВЕТ: 6 000 000 р.

Мы получили результат, совпадающий с условием задачи **68**.

ЗАДАЧА 72. 15 января планируют взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за пятый месяц (со 2 по 14 июня) кредитования нужно выплатить 44 тыс. р. Какую сумму нужно выплатить банку в течение всего срока кредитования?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме a р. (далее все суммы указаны в рублях). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 9 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $\frac{a}{9}$ (заполняем 2-й столбец таблицы). 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2%, или в 1,02 раза. Далее аналогично решениям предыдущих задач заполним таблицу.

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг на 1-е число	Платёж
0	a	$1{,}02a$	0
1	$\frac{8a}{9}$	$\frac{8{,}16a}{9}$	$1{,}02a - \frac{8a}{9} = \frac{1{,}18a}{9}$
2	$\frac{7a}{9}$	$\frac{7{,}14a}{9}$	$\frac{8{,}16a}{9} - \frac{7a}{9} = \frac{1{,}16a}{9}$
3	$\frac{6a}{9}$	$\frac{6{,}12a}{9}$	$\frac{1{,}14a}{9}$
4	$\frac{5a}{9}$	$\frac{5{,}1a}{9}$	$\frac{1{,}12a}{9}$
5	$\frac{4a}{9}$	$\frac{4{,}08a}{9}$	$\frac{1{,}1a}{9}$
6	$\frac{3a}{9}$	$\frac{3{,}06a}{9}$	$\frac{1{,}08a}{9}$
7	$\frac{2a}{9}$	$\frac{2{,}04a}{9}$	$\frac{1{,}06a}{9}$
8	$\frac{a}{9}$	$\frac{1{,}02a}{9}$	$\frac{1{,}04a}{9}$
9	0	0	$\frac{1{,}02a}{9}$

Так как за пятый месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. р., то верно равенство

$$\frac{1{,}1a}{9} = 44\,000,$$

откуда следует, что $a = 360\,000$.

Вычислим сумму всех выплат по кредиту при найденном значении a:

$$\frac{1{,}18a}{9} + \frac{1{,}16a}{9} + \ldots + \frac{1{,}04a}{9} + \frac{1{,}02a}{9} = 1{,}1a = 396\,000.$$

Следовательно, в течение всего срока кредитования банку нужно выплатить 396 000 р.

ОТВЕТ: 396 000 р.

ЗАДАЧА 73. 15 января планируют взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 798,75 тыс. р. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме a р. (далее все суммы указаны в тысячах рублей). Заполним таблицу, как в предыдущей задаче.

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг на 1-е число	Платёж
0	a	$1{,}01a$	0
1	$\frac{23a}{24}$	$\frac{23{,}23a}{24}$	$1{,}01a - \frac{23a}{24} = \frac{1{,}24a}{24}$
2	$\frac{22a}{24}$	$\frac{22{,}22a}{24}$	$\frac{23{,}23a}{24} - \frac{22a}{24} = \frac{1{,}23a}{24}$
3	$\frac{21a}{24}$	$\frac{21{,}21a}{24}$	$\frac{1{,}22a}{24}$
...	...	...	...
13	$\frac{11a}{24}$	$\frac{11{,}11a}{24}$	$\frac{1{,}12a}{24}$
...	...	...	...
22	$\frac{2a}{24}$	$\frac{2{,}02a}{24}$	$\frac{1{,}03a}{24}$
23	$\frac{a}{24}$	$\frac{1{,}01a}{24}$	$\frac{1{,}02a}{24}$
24	0	0	$\frac{1{,}01a}{24}$

Так как в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 798,75 тыс. р., составим уравнение

$$\frac{1{,}12a}{24} + \frac{1{,}11a}{24} + \ldots + \frac{1{,}01a}{24} = 798{,}75$$

и найдём его единственный корень $a = 1500$.

Теперь вычислим сумму платежей за первые 12 месяцев при $a = 1500$:

$$\frac{1{,}24a}{24} + \frac{1{,}23a}{24} + \ldots + \frac{1{,}13a}{24} = 888{,}75.$$

Итак, в первые 12 месяцев предстоит выплатить банку 888,75 тыс. р.

ОТВЕТ: 888 750 р.

ЗАДАЧА 74. В июле планируют взять кредит в банке на сумму 6 млн р. на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,8 млн р.?

РЕШЕНИЕ. В расчётах за кредиты с уменьшением долга равными частями от платежа к платежу уменьшается не только остаток долга, но и сумма платежа, поэтому, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,8 млн р. и срок расчёта за кредит был наименьшим, нужно в первый год выплатить наибольшую возможную сумму, т. е. 1,8 млн р.

В июле взят кредит на сумму 6 млн р. (далее все суммы указаны в миллионах рублей). В январе следующего года долг увеличится на 20%, или в 1,2 раза, и составит $6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$. После платежа, равного 1,8, остаток долга составит $7{,}2 - 1{,}8 = 5{,}4$. Далее долг будет ежегодно уменьшаться на $6 - 5{,}4 = 0{,}6$, следовательно, уменьшится на 6 за $6 : 0{,}6 = 10$ (лет).

Итак, кредит следует брать на 10 лет.

ОТВЕТ: на 10 лет.

ЗАДАЧА 75. В июле планируют взять кредит в банке на сумму 20 млн р. на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн р.?

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Найдём сумму выплат после погашения кредита для срока 5 лет. Кредит взят в сумме 20 млн р. (далее все суммы указаны в миллионах рублей), тогда каждый год сумма долга уменьшается на одну и ту же величину 4 (пятая часть первоначального долга).

В январе сумма из второго столбца увеличивается на 30%, или в 1,3 раза (3-й столбец таблицы). С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 2-го столбца уменьшилась до суммы из 1-го столбца следующей строки (4-й столбец таблицы).

Число прошедших лет	Долг в июле	Долг в январе	Платёж
0	20	$20 \cdot 1{,}3$	0
1	16	$16 \cdot 1{,}3$	$20 \cdot 1{,}3 - 16$

Число прошедших лет	Долг в июле	Долг в январе	Платёж
2	12	$12 \cdot 1{,}3$	$16 \cdot 1{,}3 - 12$
3	8	$8 \cdot 1{,}3$	$12 \cdot 1{,}3 - 8$
4	4	$4 \cdot 1{,}3$	$8 \cdot 1{,}3 - 4$
5	0	0	$4 \cdot 1{,}3 - 0$

Общую сумму выплат получим, сложив платежи по годам:

$$1{,}3 \cdot (20 + 16 + 12 + 8 + 4) - (16 + 12 + 8 + 4 + 0) = 38.$$

Полученный результат меньше 47, значит, надо увеличить число лет. Ближайшее число лет, для которого доли первоначального долга выражаются десятичной дробью, — это 8. Проведём аналогичные расчёты без комментариев.

Число прошедших лет	Долг в июле	Долг в январе	Платёж
0	20	$20 \cdot 1{,}3$	0
1	17,5	$17{,}5 \cdot 1{,}3$	$20 \cdot 1{,}3 - 17{,}5$
2	15	$15 \cdot 1{,}3$	$17{,}5 \cdot 1{,}3 - 15$
3	12,5	$12{,}5 \cdot 1{,}3$	$15 \cdot 1{,}3 - 12{,}5$
4	10	$10 \cdot 1{,}3$	$12{,}5 \cdot 1{,}3 - 10$
5	7,5	$7{,}5 \cdot 1{,}3$	$10 \cdot 1{,}3 - 7{,}5$
6	5	$5 \cdot 1{,}3$	$7{,}5 \cdot 1{,}3 - 5$
7	2,5	$2{,}5 \cdot 1{,}3$	$5 \cdot 1{,}3 - 2{,}5$
8	0	0	$2{,}5 \cdot 1{,}3 - 0$

Общую сумму платежа получим, сложив платежи по годам:

$$1{,}3 \cdot (20 + 17{,}5 + \ldots + 5 + 2{,}5) - (17{,}5 + 15 + \ldots + 2{,}5 + 0) = 47.$$

Полученный результат равен 47, а при увеличении числа лет сумма будет больше 47, следовательно, получен ответ на вопрос задачи.

2-й способ. Чтобы не заниматься подбором числа лет, будем считать, что условия задачи будут выполнены за x лет. Проведём аналогичные расчёты. В июле долг уменьшается на $\frac{20}{x}$ по сравнению с июлем предыдущего года, в январе увеличивается в 1,3 раза.

Число прошедших лет	Долг в июле	Долг в январе	Платёж
0	20	26	
1	$\dfrac{20(x-1)}{x}$	$\dfrac{26(x-1)}{x}$	$26-\dfrac{20(x-1)}{x}$
2	$\dfrac{20(x-2)}{x}$	$\dfrac{26(x-2)}{x}$	$\dfrac{26(x-1)}{x}-\dfrac{20(x-2)}{x}$
3	$\dfrac{20(x-3)}{x}$	$\dfrac{26(x-3)}{x}$	$\dfrac{26(x-2)}{x}-\dfrac{20(x-3)}{x}$
...	...	...	...
$x-1$	$\dfrac{20}{x}$	$\dfrac{26}{x}$	$\dfrac{26\cdot 2}{x}-\dfrac{20}{x}$
x	0	0	$\dfrac{26\cdot 1}{x}-0$

По условию задачи составим уравнение

$$\left(26+\frac{26(x-1)}{x}+\frac{26(x-2)}{x}+\ldots+\frac{26x}{x}\right)-\left(\frac{20(x-1)}{x}+\frac{20(x-2)}{x}+\ldots+\frac{20x}{x}+0\right)=47,$$

$$\frac{26}{x}\cdot\frac{(x+1)x}{2}-\frac{20}{x}\cdot\frac{(x-1)x}{2}=47,$$

$$13(x+1)-10(x-1)=47$$

и найдём его единственный корень $x=8$.

ОТВЕТ: на 8 лет.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь трудно советовать, какой способ решения выбрать, если похожая задача попадётся на экзамене. Но брать деньги в долг, чтобы через восемь лет возвращать сумму, в 2,35 раза бóльшую, можно только при полной уверенности, что вы не попадёте в долговую яму.

ЗАДАЧА 76. В июле планируют взять кредит в банке на сумму 16 млн р. на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года. На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн р.?

РЕШЕНИЕ. Будем считать, что условия задачи будут выполнены за x лет. В июле долг уменьшается на $\frac{16}{x}$ по сравнению с июлем предыдущего года, в январе увеличивается в $1{,}25=\frac{5}{4}$ раза. Далее решение аналогично второму способу решения задачи **75**.

Число прошедших лет	Долг в июле	Долг в январе	Платёж
0	16	20	
1	$\frac{16(x-1)}{x}$	$\frac{20(x-1)}{x}$	$20-\frac{16(x-1)}{x}$
2	$\frac{16(x-2)}{x}$	$\frac{20(x-2)}{x}$	$\frac{20(x-1)}{x}-\frac{16(x-2)}{x}$
3	$\frac{16(x-3)}{x}$	$\frac{20(x-3)}{x}$	$\frac{20(x-2)}{x}-\frac{16(x-3)}{x}$
...	...	...	...
$x-1$	$\frac{16}{x}$	$\frac{20}{x}$	$\frac{20\cdot 2}{x}-\frac{16}{x}$
x	0	0	$\frac{20\cdot 1}{x}-0$

По условию задачи составим уравнение

$$\left(20+\frac{20(x-1)}{x}+\frac{20(x-2)}{x}+\ldots+\frac{20x}{x}\right)-\left(\frac{16(x-1)}{x}+\frac{16(x-2)}{x}+\ldots+\frac{16x}{x}+0\right)=40,$$

$$\frac{20}{x}\cdot\frac{(x+1)x}{2}-\frac{16}{x}\cdot\frac{(x-1)x}{2}=40,$$

$$10(x+1)-8(x-1)=40$$

и найдём его единственный корень $x=11$.

Итак, кредит взят на 11 лет.

ОТВЕТ: на 11 лет.

ЗАДАЧА 77. 15 декабря планируют взять кредит в банке на 700 тыс. р. сроком на $(n+1)$ месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца (с 1-го по n-й) долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа n-го месяца долг составит 300 тыс. р.;

— к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 755 тыс. р.

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Сначала разберёмся в порядке начисления процентов и выплат для $n=2$. Для наглядности результаты вычислений внесём в таблицу. 15 декабря сумма долга составляла 700 (все суммы указаны в тысячах рублей). 1 января сумма долга увеличилась на 1%, т. е. в 1,01 раза, и составила 707. Пропустим пока 2-й столбец выплат. 15-го числа каждого месяца, кроме последнего, долг должен уменьшаться на одну и ту же величину — с 700 до 300 за два раза, т. е. на $(700-300):2=200$.

15 января остаток долга равен $700-200=500$. Сумма выплат в январе составила $707-500=207$. 1 февраля сумма долга увеличилась в 1,01 раза и составила 505. Сумма выплат в феврале составила $505-300=205$. 1 марта сумма долга увеличилась в 1,01 раза и составила 303 — это и есть сумма последней выплаты.

Месяц	Сумма долга на 1-е число	Выплата со 2-го по 14-е число	Остаток долга на 15-е число
0-й (декабрь)			700
1-й (январь)	707	207	500
2-й (февраль)	505	205	300
3-й (март)	303	303	0

Для $n = 2$ выполнены все условия задачи, кроме одного. Общая сумма выплат составила $207 + 205 + 303 = 715$, а надо 755.

Посмотрим, как меняется общая сумма выплат при увеличении числа n.

Пусть теперь $n = 4$. Результаты вычислений внесём в таблицу, учитывая, что изменится сумма, на которую уменьшается остаток долга 15-го числа каждого месяца. Теперь это $(700 - 300) : 4 = 100$. Проведя аналогичные рассуждения, получим следующую таблицу:

Месяц	Сумма долга на 1-е число	Выплата со 2-го по 14-е число	Остаток долга на 15-е число
0-й (декабрь)			700
1-й (январь)	707	107	600
2-й (февраль)	606	106	500
3-й (март)	505	105	400
4-й (апрель)	404	104	300
5-й (май)	303	303	0

Теперь общая сумма выплат составила

$$107 + 106 + 105 + 104 + 303 = 725.$$

Заметим, что увеличение числа n на 2 единицы привело к увеличению суммы выплат на 10. Это произошло из-за того, что общая сумма, на которую начисляют 1%, увеличилась на

$$(700 + 600 + 500 + 400 + 300) - (700 + 500 + 300) = 1000,$$

а 10 как раз и составляет 1% от 1000.

При дальнейшем увеличении числа n сумма выплат будет расти. Нам надо увеличить её с 725 до 755 — ещё на 30. Увеличим n на 6.

Пусть теперь $n = 10$. Результаты вычислений внесём в таблицу, учитывая, что изменится сумма, на которую уменьшается остаток долга 15-го числа каждого месяца.

Теперь это $(700-300):10=40$. Проведя аналогичные рассуждения, получим следующую таблицу:

Месяц	Сумма долга на 1-е число	Выплата со 2-го по 14-е число	Остаток долга на 15-е число
0-й (декабрь)			700
1-й (январь)	707	47	660
2-й (февраль)	666,6	46,6	620
3-й (март)	626,2	46,2	580
4-й (апрель)	585,8	45,8	540
5-й (май)	545,4	45,4	500
6-й (июнь)	505,0	45,0	460
7-й (июль)	464,6	44,6	420
8-й (август)	424,2	44,2	380
9-й (сентябрь)	383,8	43,8	340
10-й (октябрь)	343,4	43,4	300
11-й (ноябрь)	303	303	0

Теперь общая сумма выплат составила 755. Все условия задачи выполнены. Число n равно 10. С увеличением n сумма выплат превысит 755.

Первый способ решения для экзамена слишком громоздкий, хотя полностью обоснованный. Рассмотрим второй способ решения.

2-й способ. Разберёмся с остатками долга на 15-е число. В декабре остаток составляет 700, в каждый из следующих n месяцев он уменьшается на одну и ту же величину до 300, т. е. уменьшается на $\frac{700-300}{n}=\frac{400}{n}$. Заполняем 4-й столбец.

Получим остаток долга в 1-й месяц: $700-\frac{400\cdot 1}{n}$, во 2-й месяц: $700-\frac{400\cdot 2}{n}$, ..., в $(n-1)$-й месяц: $700-\frac{400\cdot(n-1)}{n}$, в n-й месяц: $700-\frac{400\cdot n}{n}=300$.

Каждый из полученных остатков умножаем на 1,01. Найденные суммы долга на 1-е число следующего месяца вносим в таблицу. Получим сумму долга на 1-е число в 1-й месяц: 707, во 2-й месяц: $707-\frac{404\cdot 2}{n}$, ..., в n-й месяц: $707-\frac{404\cdot(n-1)}{n}$, в $(n+1)$-й месяц: 303 — это и есть сумма последнего платежа.

Месяц	Сумма долга на 1-е число	Выплата со 2-го по 14-е число	Остаток долга на 15-е число
0-й (дек.)			700
1-й (янв.)	707	$7+\dfrac{400\cdot 1}{n}$	$700-\dfrac{400\cdot 1}{n}$
2-й (фев.)	$707-\dfrac{404\cdot 1}{n}$	$7-\dfrac{404\cdot 1}{n}+\dfrac{400\cdot 2}{n}$	$700-\dfrac{400\cdot 2}{n}$
...	...	...	...
$(n-1)$-й	...	...	$700-\dfrac{400\cdot(n-1)}{n}$
n-й	$707-\dfrac{404\cdot(n-1)}{n}$	$7-\dfrac{404\cdot(n-1)}{n}+\dfrac{400\cdot n}{n}$	$700-\dfrac{400\cdot n}{n}=300$
$(n+1)$-й	303	303	0

Теперь определим в каждый из n месяцев сумму выплаты со 2-го числа по 14-е, вычитая в каждой строке таблицы из суммы долга на 1-е число остаток долга на 15-е число. Получим в 1-й месяц: $707-\left(700-\dfrac{401\cdot 1}{n}\right)=7+\dfrac{401\cdot 1}{n}$, во 2-й месяц: $707-\dfrac{404\cdot 1}{n}-$ $-\left(700-\dfrac{400\cdot 2}{n}\right)=7-\dfrac{404\cdot 1}{n}+\dfrac{400\cdot 2}{n}$, ..., в n-й месяц: $707-\dfrac{404\cdot(n-1)}{n}-\left(700-\dfrac{400\cdot n}{n}\right)=$ $=7-\dfrac{404\cdot(n-1)}{n}+\dfrac{400\cdot n}{n}$.

Теперь сложим все выплаты за n месяцев, группируя отдельно дроби со знаком «+» и со знаком «−» и вынося общие множители за скобки. Получим

$$7n-\frac{404}{n}\cdot(1+2+\ldots+(n-1))+\frac{400}{n}\cdot(1+2+\ldots+(n-1)+n)+303=$$

$$=7n-\frac{404}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}+\frac{400}{n}\cdot\frac{(n+1)n}{2}+303=5n+705,$$

что по условию задачи равно 755.

Решив уравнение $5n+705=755$, получим его единственный корень 10. Искомое число n равно 10.

ОТВЕТ: $n=10$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для упрощения промежуточных записей в решении на экзамене можно обозначить буквами числа 700 и $\dfrac{400}{n}$. Похожие обозначения введены при решении следующей задачи, в которой после нахождения срока выплаты кредита требуется найти и сумму всех выплат банку.

ЗАДАЧА 78. В июле планируют взять кредит в банке на сумму 28 млн р. на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн р.?

РЕШЕНИЕ. Пусть $a = 28$, остаток долга уменьшается каждый год на x (все расчёты приведены в миллионах рублей), кредит погашен полностью за n лет. Остатки долга в июле образуют последовательность

$$a,\ a - x,\ a - 2x,\ \dots,\ a - (n-1)x,\ a - nx. \qquad (1)$$

Для наглядности результаты вычислений внесём в таблицу. Суммы долга в январе находим, увеличивая члены последовательности (1) на 25%, или в $\frac{5}{4}$ раза. Они составляют последовательность

$$\frac{5}{4}a,\ \frac{5}{4}a - \frac{5}{4}x,\ \frac{5}{4}a - \frac{5}{4}\cdot 2x,\ \dots,\ \frac{5}{4}a - \frac{5}{4}\cdot(n-1)x.$$

Выплата банку в 1-й год составила $\frac{5}{4}a - (a - x) = \frac{1}{4}a + x$, во 2-й год — $\frac{5}{4}a - \frac{5}{4}x - (a - 2x) = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}x$, в n-й год — $\frac{5}{4}(a - (n-1)x) - (a - nx) = \frac{1}{4}a + \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}nx$.

Прошло лет	Сумма долга в январе	Выплата с февраля по июнь	Остаток долга в июле
0			a
1	$\frac{5}{4}a$	$\frac{1}{4}a + x$	$a - x$
2	$\frac{5}{4}a - \frac{5}{4}x$	$\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}x$	$a - 2x$
...	...	...	...
$n-1$	...	...	$a - (n-1)x$
n	$\frac{5}{4}a - \frac{5}{4}\cdot(n-1)x$	$\frac{1}{4}a + \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}nx$	$a - nx$

Последовательность сумм выплат составляет убывающую арифметическую прогрессию с разностью $-\frac{1}{4}x$, поэтому наибольшая выплата была в 1-й год:

$$\frac{1}{4}a + x = 9. \qquad (2)$$

Так как за n лет расчёты с банком полностью завершены, то последний остаток долга равен 0:

$$a - nx = 0. \qquad (3)$$

Учитывая, что $a = 28$, из уравнений (2) и (3) находим $x = 2$, $n = 14$.

Используя найденные значения x и n, вычислим сумму платежей за 14 лет:

$$9 + 8{,}5 + \dots + 2{,}5 = 80{,}5.$$

Итак, взяв кредит в банке на сумму 28 млн р., вернули банку 80,5 млн р.

ОТВЕТ: 80 500 000 р.

НАХОЖДЕНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ЗА КРЕДИТ (ПЛАТЁЖ)

ЗАДАЧА 79. 15 января планируют взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить за весь срок кредитования?

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме a р. (далее все суммы указаны в рублях). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Эта сумма уменьшается до нуля за 5 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $\frac{a}{5}$. Далее заполним таблицу аналогично решениям рассмотренных выше задач.

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг на 1-е число	Платёж
0	a	$1{,}01a$	0
1	$\frac{4a}{5}$	$\frac{4{,}04a}{5}$	$1{,}01a - \frac{4a}{5} = \frac{1{,}05a}{5}$
2	$\frac{3a}{5}$	$\frac{3{,}03a}{5}$	$\frac{4{,}04a}{5} - \frac{3a}{5} = \frac{1{,}04a}{5}$
3	$\frac{2a}{5}$	$\frac{2{,}02a}{5}$	$\frac{1{,}03a}{5}$
4	$\frac{a}{5}$	$\frac{1{,}01a}{5}$	$\frac{1{,}02a}{5}$
5	0	0	$\frac{1{,}01a}{5}$

Общая сумма денег, выплаченных банку, равна

$$\frac{1{,}05a}{5} + \frac{1{,}04a}{5} + \frac{1{,}03a}{5} + \frac{1{,}02a}{5} + \frac{1{,}01a}{5} = 1{,}03a,$$

что составляет 103% от суммы кредита. Тогда за весь срок кредитования нужно выплатить банку 103% от суммы кредита.

ОТВЕТ: 103%.

ЗАДАЧА 80. 15 января планируют взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме a р. (далее все суммы указаны в рублях). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Эта сумма уменьшается до нуля за 9 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $\frac{a}{9}$ (заполним 2-й столбец таблицы). 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\%$, или в b раз, где $b = 1 + \frac{r}{100}$. Далее аналогично предыдущим решениям заполним таблицу:

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг на 1-е число	Платёж
0	a	ab	0
1	$\frac{8a}{9}$	$\frac{8ab}{9}$	$ab - \frac{8a}{9} = \frac{(9b-8)a}{9}$
2	$\frac{7a}{9}$	$\frac{7ab}{9}$	$\frac{8ab}{9} - \frac{7a}{9} = \frac{(8b-7)a}{9}$
3	$\frac{6a}{9}$	$\frac{6ab}{9}$	$\frac{(7b-6)a}{9}$
4	$\frac{5a}{9}$	$\frac{5ab}{9}$	$\frac{(6b-5)a}{9}$
5	$\frac{4a}{9}$	$\frac{4ab}{9}$	$\frac{(5b-4)a}{9}$
6	$\frac{3a}{9}$	$\frac{3ab}{9}$	$\frac{(4b-3)a}{9}$
7	$\frac{2a}{9}$	$\frac{2ab}{9}$	$\frac{(3b-2)a}{9}$
8	$\frac{a}{9}$	$\frac{ab}{9}$	$\frac{(2b-1)a}{9}$
9	0	0	$\frac{(b-0)a}{9}$

Общая сумма, выплаченная банку, равна

$$\frac{(9b-8)a}{9} + \frac{(8b-7)a}{9} + \ldots + \frac{(2b-1)a}{9} + \frac{(b-0)a}{9} =$$

$$= \frac{((9+8+\ldots+2+1)b - (8+7+\ldots+1+0))a}{9} = (5b-4)a,$$

что составляет $100\% + 15\% = 115\%$ от суммы кредита, т. е. $1{,}15a$.

Решив уравнение

$$(5b-4)a = 1{,}15a$$

относительно b ($a \neq 0$), получим, что $b = 1{,}03$, тогда $r = 3$.

ОТВЕТ: 3.

ЗАДАЧА 81. 15 января планируют взять кредит в банке на 12 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 13 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

РЕШЕНИЕ. Пусть кредит взят в сумме a р. (далее все суммы указаны в рублях). Пусть 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 12 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на $\frac{a}{12}$ (заполним 2-й столбец таблицы). 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\%$, или в b раз, где $b = 1 + \frac{r}{100}$. Далее аналогично решению задачи **80** заполним таблицу.

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг на 1-е число	Платёж
0	a	ab	0
1	$\frac{11a}{12}$	$\frac{11ab}{12}$	$ab - \frac{11a}{12} = \frac{(12b - 11)a}{12}$
2	$\frac{10a}{12}$	$\frac{10ab}{12}$	$\frac{11ab}{12} - \frac{10a}{12} = \frac{(11b - 10)a}{12}$
3	$\frac{9a}{12}$	$\frac{9ab}{12}$	$\frac{(10b - 9)a}{12}$
...	...	...	...
10	$\frac{2a}{12}$	$\frac{2ab}{12}$	$\frac{(3b - 2)a}{12}$
11	$\frac{a}{12}$	$\frac{ab}{12}$	$\frac{(2b - 1)a}{12}$
12	0	0	$\frac{(b - 0)a}{12}$

Общая сумма, выплаченная банку, равна

$$\frac{(12b - 11)a}{12} + \frac{(11b - 10)a}{12} + \ldots + \frac{(2b - 1)a}{12} + \frac{(b - 0)a}{12} =$$

$$= \frac{((12 + 11 + \ldots + 2 + 1)b - (11 + 7 + \ldots + 1 + 0))a}{12} = (6{,}5b - 5{,}5)a,$$

что составляет $100\% + 13\% = 113\%$ от суммы кредита, т. е. $1{,}13a$.

Решив уравнение

$$(6{,}5b - 5{,}5)a = 1{,}13a$$

относительно b ($a \neq 0$), получим, что $b = 1{,}02$, тогда $r = 2$.

ОТВЕТ: 2.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 82. 15 января планируют взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

ЗАДАЧА 83. В июле планируют взять кредит в банке на сумму 6 млн р. на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,9 млн р., а наименьший — не менее 0,5 млн р.

РЕШЕНИЕ. Кредит взят в сумме 6 млн р. (далее все суммы указаны в миллионах рублей). Пусть каждый год в июле сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 15 лет, следовательно, за каждый год она уменьшается на $\frac{6}{15}=0{,}4$ (заполним 2-й столбец таблицы). В январе следующего года долг увеличивается на $r\%$, или в b раз, где $b=1+\frac{r}{100}$ (заполним 3-й столбец таблицы). Первый платёж равен $6b-5{,}6$ (самый большой), последний платёж равен $0{,}4b$ (самый маленький), так как в 4-м столбце таблицы платежи из года в год уменьшаются на $0{,}4b-0{,}4>0$.

Число прошедших лет	Долг в июле	Долг в январе	Платёж
0	6	$6b$	0
1	5,6	$5{,}6b$	$6b-5{,}6$
2	5,2	$5{,}2b$	$5{,}6b-5{,}2$
...	...	...	...
13	0,8	$0{,}8b$	$1{,}2b-0{,}8$
14	0,4	$0{,}4b$	$0{,}8b-0{,}4$
15	0	0	$0{,}4b$

По условию задачи $6b - 5{,}6 \leqslant 1{,}9$ и $0{,}4b \geqslant 0{,}5$.

Решив систему неравенств

$$\begin{cases} 6b - 5{,}6 \leqslant 1{,}9 \\ 0{,}4b \geqslant 0{,}5, \end{cases}$$

получим $b = 1{,}25$. Так как как $b = 1 + \frac{r}{100}$, то $r = 25$.

ОТВЕТ: 25.

ЗАДАЧА 84. В январе 2000 г. ставка по депозитам в неком банке составляла x% годовых, тогда как в январе 2001 г. она составила y% годовых, причём известно, что $x + y = 30$ (%). В январе 2000 г. вкладчик открыл счёт в этом банке, положив на него некоторую сумму. В январе 2001 г. вкладчик снял со счёта 0,2 этой суммы. Укажите значение x, при котором сумма на счёте вкладчика в январе 2002 г. станет максимально возможной.

РЕШЕНИЕ. Пусть в январе 2000 г. вкладчик положил на счёт a р. (далее все расчёты приведены в рублях). В январе 2001 г. эта сумма увеличилась до

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right) = a \cdot \frac{100 + x}{100}.$$

Вкладчик оставил на счёте $1 - 0{,}2 = 0{,}8$ этой суммы, т. е. $0{,}8a \cdot \frac{100 + x}{100}$. В январе 2002 г. оставленная на счёте сумма увеличилась до

$$0{,}8a \cdot \frac{100 + x}{100} \cdot \left(1 + \frac{30 - x}{100}\right) = \frac{0{,}8a}{10\,000} \cdot (-x^2 + 30x + 13\,000).$$

Найдём значение x, при котором выражение $\frac{0{,}8a}{10\,000} \cdot (-x^2 + 30x + 13\,000)$ достигает наибольшего значения. Выделив полный квадрат, запишем выражение в виде

$$\frac{0{,}8a}{10000} \cdot (-(x - 15)^2 + 13\,225).$$

Так как $\frac{0{,}8a}{10\,000} > 0$, то полученное выражение достигает наибольшего значения при $x = 15$.

Тот же результат можно получить, используя формулу $x_0 = \frac{-b}{2a}$ для вычисления абсциссы вершины параболы $f(x) = ax^2 + bx + c$. В этой точке квадратичная функция $f(x)$ с отрицательным коэффициентом при x^2 достигает наибольшего значения.

Ответ на вопрос задачи не зависит от первоначальной суммы a и от того, какая часть этой суммы оставлена на счёте на второй год.

ОТВЕТ: 15.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученный результат наводит на мысль, что ответ составляет ровно половину от суммы $x + y$. В этом можно убедиться, решив задачу с заменой числа 30 на p. Аналогичными рассуждениями мы придём к функции

$$f(x) = -x^2 + px + q = -(x - 0{,}5p)^2 + r,$$

которая достигает наибольшего значения при $x = 0{,}5p$ (числа, не влияющие на полученный ответ, для краткости заменены буквами q и r).

Отметим, что мы рассмотрели решение типичной псевдопрактической задачи с экономическим содержанием. Дело в том, что в 2000 г. число x было задано. После задания числа y в 2001 г. сумма на счёте вкладчика в начале 2002 г. будет фиксированной при выполнении остальных условий задачи. Поиск её наибольшего значения в зависимости от x лишён смысла, так как это число x неизменно по условию задачи. Составим новую задачу, в решении которой используем опыт решения предыдущей задачи.

ЗАДАЧА 85. В банке «Чудесный» планируют программу двухлетних депозитных вкладов «Выбирайте проценты!», по условиям которой вкладчик вносит сумму на депозитный счёт в начале первого года, а забирает в конце второго. При этом вкладчик имеет право задавать ставки по депозитам на начало первого и второго года в размере $x\%$ и $(30-x)\%$ годовых соответственно. Найдите число x, такое, что $0<x<30$, для которого за два года вкладчик получит наибольший доход.

РЕШЕНИЕ. Пусть в начале первого года вкладчик положил на счёт a р. (далее все расчёты приведены в рублях) под $x\%$ годовых. Если для первого года вкладчик выберет процентную ставку $x=15-u$, то для второго года процентная ставка составит $15+u$. За два года вложенная сумма увеличится до

$$a\left(1+\frac{15-u}{100}\right)\left(1+\frac{15+u}{100}\right)=a\cdot\frac{(115+u)(115-u)}{10\,000}=a\cdot\frac{115^2-u^2}{10\,000}.$$

За два года вкладчик получит наибольший доход, если $u=0$, т. е. если $x=15$.

ОТВЕТ: $x=15$.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 86. 15 января планируют взять кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 39% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

ЗАДАЧА 87. 15 января планируют взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. р. Какую сумму планируют взять в кредит?

Кредиты с неравномерным уменьшением долга

ЗАДАЧА 88. 15 января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100	90	80	70	60	50	0

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

РЕШЕНИЕ. Пусть взяли в кредит a р. (все суммы указаны в рублях). По условиям задачи заполним в таблице суммы долга на 15-е число каждого месяца (2-й столбец таблицы), увеличим на 5% полученные суммы (3-й столбец таблицы). Вычислим платежи каждого месяца, вычитая из числа в 3-м столбце таблицы число во 2-м столбце таблицы строкой ниже.

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг в конце месяца	Платёж
0	a	$1{,}05a$	0
1	$0{,}9a$	$0{,}945a$	$1{,}05a - 0{,}9a = 0{,}15a$
2	$0{,}8a$	$0{,}84a$	$0{,}945a - 0{,}8a = 0{,}145a$
3	$0{,}7a$	$0{,}735a$	$0{,}84a - 0{,}7a = 0{,}14a$
4	$0{,}6a$	$0{,}63a$	$0{,}735a - 0{,}6a = 0{,}135a$
5	$0{,}5a$	$0{,}525a$	$0{,}63a - 0{,}5a = 0{,}13a$
6	0	0	$0{,}525a$

Сложив все платежи, получим

$$0{,}15a + 0{,}145a + 0{,}14a + 0{,}135a + 0{,}13a + 0{,}525a = 1{,}225a.$$

Общая сумма выплат больше суммы самого кредита на $0{,}225a$, или на 22,5%.

ОТВЕТ: на 22,5%.

ЗАДАЧА 89. 15 января планируют взять кредит в банке на 1 млн р. на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн р.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн р.

РЕШЕНИЕ. Пусть $b = 1 + \frac{r}{100}$. По условиям задачи заполним второй столбец таблицы — суммы долга на 15-е число каждого месяца (в миллионах рублей). Увеличим на $r\%$, или в b раз, полученные суммы (3-й столбец таблицы). Вычислим платежи каждого месяца, вычитая из числа в 3-м столбце таблицы число во 2-м столбце таблицы строкой ниже.

Число прошедших месяцев	Долг на 15-е число	Долг в конце месяца	Платёж
0	1	b	0
1	0,6	$0{,}6b$	$b - 0{,}6$
2	0,4	$0{,}4b$	$0{,}6b - 0{,}4$
3	0,3	$0{,}3b$	$0{,}4b - 0{,}3$
4	0,2	$0{,}2b$	$0{,}3b - 0{,}2$
5	0,1	$0{,}1b$	$0{,}2b - 0{,}1$
6	0	0	$0{,}1b$

Сложив все платежи, получим $2{,}6b - 1{,}6$.

Так как общая сумма выплат должна быть меньше 1,2 млн р., то из неравенства $2{,}6b - 1{,}6 < 1{,}2$ получим $b = 1 + \frac{r}{100} < 1 + \frac{1}{13}$. Наибольшее значение r, при котором это условие выполняется, равно 7.

ОТВЕТ: 7.

ЗАДАЧА 90. В июле 2016 г. взяли кредит в банке на три года в размере a млн р., где a — целое число. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016 г.	Июль 2017 г.	Июль 2018 г.	Июль 2019 г.
Долг (в млн р.)	a	$0{,}7a$	$0{,}4a$	0

Найдите наименьшее целое a, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн р.

РЕШЕНИЕ. По условиям задачи заполним 2-й столбец таблицы — суммы долга на июль каждого года (в миллионах рублей). Увеличим на 25% полученные суммы (3-й столбец таблицы). Вычислим платежи каждого месяца, вычитая из числа в 3-м столбце таблицы число во 2-м столбце таблицы строкой ниже.

Число прошедших лет	Долг в июле	Долг в январе	Платёж
0	a	$1{,}25a$	0
1	$0{,}7a$	$0{,}875a$	$1{,}25a-0{,}7a=0{,}55a$
2	$0{,}4a$	$0{,}5a$	$0{,}875a-0{,}4a=0{,}475a$
3	0	0	$0{,}5a$

Каждая из выплат будет больше 5 млн р., если меньшая из них будет больше 5 млн р., т. е. выполнено неравенство $0{,}475a>5$. Наименьшее целое решение системы этих неравенств $a=11$.

ОТВЕТ: 11.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 91. В июле 2016 г. взяли кредит в банке на четыре года в размере a млн р., где a — целое число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016 г.	Июль 2017 г.	Июль 2018 г.	Июль 2019 г.	Июль 2020 г.
Долг (в млн р.)	a	$0{,}8a$	$0{,}5a$	$0{,}1a$	0

Найдите наибольшее значение a, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн р.

ЗАДАЧА 92. В июле 2020 г. планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 р., то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 р., то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

РЕШЕНИЕ. Пусть $b=1+\frac{r}{100}$ и взяли в кредит a рублей (все суммы указаны в рублях). Для краткости записи решения обозначим $x=58\,564$, $y=106\,964$.

Так как при ежегодной выплате x р. кредит будет полностью погашен за 4 года, то верно равенство

$$\Big(\big((ab - x)b - x\big)b - x\Big)b - x = 0. \qquad (1)$$

Так как при ежегодной выплате y р. кредит будет полностью погашен за 2 года, то верно равенство

$$(ab - y)b - y = 0. \qquad (2)$$

Выразив из равенств (1) и (2) число a и приравняв полученные результаты, получим уравнение относительно b. Выполним равносильные преобразования полученного уравнения, учитывая, что $b > 1$ и $b^3 + b^2 + 1 = \frac{b^4 - 1}{b - 1}$:

$$\frac{(b^3 + b^2 + b + 1)x}{b^4} = \frac{(b + 1)y}{b^2}$$

$$(b^3 + b^2 + b + 1)x = b^2(b + 1)y,$$

$$\frac{(b^4 - 1)x}{b - 1} = b^2(b + 1)y,$$

$$\frac{(b + 1)(b - 1)(b^2 + 1)x}{b - 1} = b^2(b + 1)y,$$

$$(b^2 + 1)x = b^2 y,$$

откуда получим, что $b^2 = \frac{x}{y - x} = \frac{58\,564}{106\,964 - 58\,564} = 1{,}21.$

Так как $b > 0$, то $b = 1{,}1$. Следовательно, $r = 10$.

ОТВЕТ: 10.

Шахты, комбинаты, области...

Начнём с задачи про шахты. Ситуация, описанная в ней, весьма условна, так как ни в одной шахте мира не добывают алюминий и никель в чистом виде, да ещё в одной шахте! Будем считать, что для упрощения описания сюжета авторы задачи никелевую руду и алюминиевую руду называют для краткости «никель» и «алюминий», а расчёты ведут с массой металла, содержащегося в руде каждого вида.

ЗАДАЧА 93. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 ч в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 ч в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Пусть на первой шахте x рабочих добывают алюминий и $(100-x)$ рабочих добывают никель. В день они добывают $5x$ кг алюминия и $15(100-x)=1500-15x$ кг никеля.

Пусть на второй шахте y рабочих добывают алюминий и $(300-y)$ рабочих добывают никель. В день они добывают $15y$ кг алюминия и $5(300-y)=1500-5y$ кг никеля.

Для сплавления металлов алюминия берут в 2 раза больше, чем никеля. Составим уравнение

$$5x+15y=2(1500-15x+1500-5y),$$

откуда получим, что

$$y=240-1{,}4x.$$

Весь металл уходит в переплавку, и масса m полученного сплава равна

$$m=5x+15y+3000-15x-5y,$$

$$m=3000+10y-10x. \qquad (1)$$

Подставим в равенство (1) вместо y выражение $240-1{,}4x$, получим

$$m=5400-14x.$$

Наибольшая масса сплава получится при $x=0$, она равна 5400 кг.

2-й способ. Покажем решение попроще. Очевидно, что на первой шахте, в которой в день 100 рабочих могут добыть 1500 кг никеля, выгоднее добывать никель. А 300 рабочих на второй шахте могли бы добыть 4500 кг алюминия, но столько не требуется, алюминия должно быть в 2 раза больше, чем никеля, а не в 3 раза. Пусть на второй шахте n рабочих добывают никель и $(300-n)$ рабочих добывают алюминий. В день они добывают $5n$ кг никеля и $15(300-n)=4500-15n$ кг алюминия.

Для сплавления металлов алюминия берут в 2 раза больше, чем никеля. Составим уравнение

$$4500-15n=2(1500+5n),$$

имеющее единственный корень $n=60$.

Весь металл уходит в переплавку, и масса m полученного сплава равна

$$m = 4500 - 15n + 1500 + 5n = 6000 - 10n = 6000 - 600 = 5400.$$

Наибольшая масса сплава равна 5400 кг.

ОТВЕТ: 5400 кг.

ЗАДАЧА 94. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали A и B. На первом комбинате работают 60 человек, и один рабочий изготавливает за смену 10 деталей A или 15 деталей B. На втором комбинате работают 260 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей A или 10 деталей B. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны две детали A и одна деталь B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену?

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Пусть на первом комбинате x рабочих изготавливают детали A и $(60 - x)$ рабочих изготавливают детали B. За смену изготавливают $10x$ деталей A и $15(60 - x) = 900 - 15x$ деталей B.

Пусть на втором комбинате y рабочих изготавливают детали A и $(260 - y)$ рабочих изготавливают детали B. За смену изготавливают $15y$ деталей A и $10(260 - y) = 2600 - 10y$ деталей B.

Для сборки изделий берут в 2 раза больше деталей A, чем деталей B. Составим уравнение

$$10x + 15y = 2(900 - 15x + 2600 - 10y),$$

откуда получим, что

$$y = 200 - \frac{8}{7}x.$$

Так как число изделий i равно числу деталей B, то

$$i = 3500 - 15x - 10y. \qquad (2)$$

Подставим в равенство (2) вместо y выражение $200 - \frac{8}{7}x$, получим

$$i = 1500 - 3\frac{4}{7}x.$$

Наибольшее число изделий получится при $x = 0$, оно равно 1500.

2-й способ. На первом комбинате выгоднее изготавливать детали B. 60 рабочих за смену изготовят 900 деталей B. Если бы на втором комбинате все рабочие изготавливали детали A, то за смену они изготовили бы $260 \cdot 15 = 3900$ деталей A, т. е. в $4\frac{1}{3}$ больше, чем деталей B, а требуется в 2 раза больше.

Пусть на втором комбинате n рабочих изготавливают детали B и $(260 - n)$ рабочих изготавливают детали A. За смену они изготавливают $10n$ деталей B и $15(260 - n) = 3900 - 15n$ деталей A.

Для сборки изделий берут в 2 раза больше деталей A, чем деталей B. Составим уравнение

$$3900 - 15n = 2(900 + 10n),$$

имеющее единственный корень $n = 60$.

Так как число изделий i равно числу деталей B, то

$$i = 900 + 10n = 900 + 600 = 1500.$$

Наибольшее число изделий равно 1500.

ОТВЕТ: 1500.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 95. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали A и B. На первом комбинате работают 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей A или 15 деталей B. На втором комбинате работают 100 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей A или 5 деталей B. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны две детали A и одна деталь B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену?

ЗАДАЧА 96. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали A и B. На первом комбинате работают 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей A или 5 деталей B. На втором комбинате работают 100 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей A или 15 деталей B. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны две детали A и одна деталь B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену?

Условия следующей задачи чуть сложнее.

ЗАДАЧА 97. В каждом из двух комбинатов работает по 1000 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 3 детали A или одну деталь B. На втором комбинате для изготовления $10t$ деталей (как A, так и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны одна деталь A и 3 детали B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену?

РЕШЕНИЕ. Пусть на первом комбинате y рабочих изготавливают детали A и $(1000-y)$ рабочих изготавливают детали B. За смену изготавливают $3y$ деталей A и $(1000-y)$ деталей B.

Пусть на втором комбинате x рабочих изготавливают детали A и $(1000-x)$ рабочих изготавливают детали B. Потратив y человеко-смен на изготовление деталей A, получат $10\sqrt{x}$ деталей A. Потратив $1000-x$ человеко-смен на изготовление деталей B, получат $10\sqrt{1000-x}$ деталей B. Деталей B должно быть в 3 раза больше, чем деталей A. Составим уравнение

$$3\left(3y+10\sqrt{x}\right)=1000-y+10\sqrt{1000-x},$$

откуда получим, что

$$y=100+\sqrt{1000-x}-3\sqrt{x}.$$

Так как число изделий i равно числу деталей A, то это число равно

$$i=3y+10\sqrt{x},$$

откуда, подставив выражение $100+\sqrt{100-x}-3\sqrt{x}$ вместо y, получим, что

$$i=300+\sqrt{x}+3\sqrt{1000-x}. \qquad (3)$$

Рассмотрим непрерывную функцию $i(x)$, заданную формулой (3) на отрезке $[0;\ 1000]$ и дающую целые значения величины i для некоторых целых значений x из указанного отрезка.

Производная функции $i(x)$ равна $i'(x) = \dfrac{\sqrt{1000-x} - 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{1000-x}}$. На указанном отрезке функция $i(x)$ имеет единственную критическую точку $x_0 = 100$. Эта точка является точкой максимума, так как для $x < 100$ производная $i'(x)$ положительна, а для $x > 100$ — отрицательна. Так как $i(100) = 400$, то наибольшее число изделий равно 400.

ОТВЕТ: 400.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 98. На каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 2 детали A или 2 детали B. На втором комбинате для изготовления $10t$ деталей (как A, так и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны одна деталь A и одна деталь B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену?

Условия следующей задачи ещё сложнее.

ЗАДАЧА 99. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться 10 ч в сутки на добыче алюминия и никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

РЕШЕНИЕ. *1-й способ.* Пусть в первой области y рабочих добывают алюминий и $(50 - y)$ рабочих добывают никель. В день они добывают $2y$ кг алюминия и $(50 - y)$ кг никеля.

Пусть во второй области за сутки добывают x кг алюминия, затрачивая x^2 человеко-часов труда. Тогда алюминий добывают $0{,}1x^2$ рабочих, а никель добывают $(50 - 0{,}1x^2)$ рабочих, затрачивая $(500 - x^2)$ человеко-часов труда и добывая $\sqrt{500 - x^2}$ кг никеля.

Для сплавления никеля берут в 2 раза больше, чем алюминия. Составим уравнение

$$50 - y + \sqrt{500 - x^2} = 2(2y + x),$$

откуда получим, что

$$y = 0{,}2\left(\sqrt{500 - x^2} + 50 - 2x\right).$$

Теперь вычислим массу m полученного сплава:

$$m = 50 - y + \sqrt{500 - x^2} + 2y + x = 50 + \sqrt{500 - x^2} + y + x,$$

откуда, подставив выражение $0{,}2\left(\sqrt{500-x^2}+50-2x\right)$ вместо y, получим, что

$$m=0{,}6\left(2\sqrt{500-x^2}+100+x\right).$$

Рассмотрим непрерывную функцию

$$m(x)=0{,}6\left(2\sqrt{500-x^2}+100+x\right),$$

определённую на отрезке $\left[0;10;\sqrt{5}\right]$ и дающую значения величины m для целых значений x из указанного отрезка.

Производная функции $m(x)$ равна $m'(x)=0{,}6\cdot\dfrac{\sqrt{500-x^2}-2x}{\sqrt{500-x^2}}$. На указанном отрезке функция $m(x)$ имеет единственную критическую точку $x_0=10$. Эта точка является точкой максимума, так как для $x<10$ производная $m'(x)$ положительна, а для $x>10$ — отрицательна. Так как $m(10)=90$, то наибольшая масса сплава равна 90 кг.

2-й способ. Пусть по-прежнему в первой области y рабочих добывают алюминий и $(50-y)$ рабочих добывают никель. В день они добывают $2y$ кг алюминия и $(50-y)$ кг никеля.

Применим другие обозначения для второго комбината.

Пусть r рабочих во второй области добывают алюминий. Затрачивая в сутки $10r$ человеко-часов труда, они добывают $\sqrt{10r}$ кг алюминия. Оставшиеся $(50-r)$ рабочих добывают никель. Затрачивая в сутки $10(50-r)=500-10r$ человеко-часов труда, они добывают $\sqrt{500-10r}$ кг никеля.

Для сплавления никеля берут в 2 раза больше, чем алюминия. Составим уравнение

$$2\left(2y+\sqrt{10r}\right)=50-y+\sqrt{500-10r},$$

из которого получим, что $y=10+0{,}2\sqrt{500-10r}-0{,}4\sqrt{10r}$.

Теперь вычислим массу m полученного сплава:

$$m=2y+\sqrt{10r}+50-y+\sqrt{500-10r}=y+50+\sqrt{10r}+\sqrt{500-10r},$$

откуда, подставив выражение $10+0{,}2\sqrt{500-10r}-0{,}4\sqrt{10r}$ вместо y, получим, что

$$m=60+0{,}6\sqrt{10r}+1{,}2\sqrt{500-10r}.$$

Рассмотрим непрерывную функцию

$$m(r)=0{,}6\left(100+\sqrt{10r}+2\sqrt{500-10r}\right),$$

определённую на отрезке [0; 50] и дающую значения величины m для целых значений x из указанного отрезка.

Производная функции $m(r)$ равна $m'(r)=3\cdot\dfrac{\sqrt{500-10r}-2\sqrt{10r}}{\sqrt{10r}\cdot\sqrt{500-10r}}$. На указанном отрезке функция $m(r)$ имеет единственную критическую точку $r_0=10$. Эта точка является точкой максимума, так как для $r<10$ производная $m'(r)$ положительна, а для $r>10$ — отрицательна. Так как $m(10)=90$, то наибольшая масса сплава равна 90 кг.

ОТВЕТ: 90 кг.

Надо признать, что оба решения получились уж очень сложные, требующие применения производной. Наш коллега Ю. О. Пукас нашёл возможность упростить первое решение.

Если массу добытого алюминия обозначить $2y + x = a\left(a = \frac{m}{3}\right)$, то, подставив в равенство

$$50 - y + \sqrt{500 - x^2} = 2(2y + x)$$

a вместо $2y + x$ и $\frac{a - x}{2}$ вместо y, перепишем его в виде

$$2\sqrt{500 - x^2} = 5a - x - 100.$$

Возведя это равенство в квадрат, после упрощения получим квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - 2(a - 20)x - 200a + 1600 = 0.$$

Чтобы задача имела решение, это уравнение должно иметь неотрицательный дискриминант:

$$(a - 20)^2 - 5a^2 + 200a - 1600 \geqslant 0,$$

что даёт границы для a:

$$10 \leqslant a \leqslant 30.$$

Масса сплава будет наибольшей, если с сохранением отношения масс металлов масса алюминия a будет наибольшей. При наибольшем значении $a = 30$ из этого промежутка квадратное уравнение имеет единственный корень $x = 10$. При этом получается наибольшее значение $m = 90$.

Таким образом, нашлось решение задачи без применения производной.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 100. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 ч в сутки на добыче алюминия и никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Для разнообразия сюжетов рассмотрим задачу, предлагавшуюся на ЕГЭ в 2015 г., в которой требовалось найти наименьшее значение величины.

ЗАДАЧА 101. Владислав является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. Поэтому если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владислав платит рабочему 500 р. Владиславу нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

РЕШЕНИЕ. Пусть на заводе в первом городе рабочие трудятся суммарно t^2 часов в неделю и производят $2t$ единиц товара, а на заводе во втором городе рабочие трудятся суммарно x^2 часов в неделю и производят $5x$ единиц товара. Тогда верно равенство

$$2t + 5x = 580,$$

откуда $2t = 580 - 5x$.

Сумма, расходуемая на оплату труда, равна

$$500(t^2 + x^2) = 125(4t^2 + 4x^2) = 125((580 - 5x)^2 + 4x^2) == 125 \cdot 29 \cdot (x^2 - 200x + 11\,600).$$

Эта сумма будет наименьшей, если квадратичная функция

$$y = x^2 - 200x + 11\,600$$

принимает наименьшее значение, т. е. в точке $x = 100$ (абсцисса вершины параболы).

Итак, наименьшая сумма равна

$$125 \cdot 29 \cdot (100^2 - 200 \cdot 100 + 11\,600) = 5\,800\,000 \text{ р.}$$

ОТВЕТ: 5 800 000 р.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 102. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. Поэтому если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 р. Григорий готов выделять 5 000 000 р. в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Шоколадные батончики

Рассмотрим ещё две задачи на нахождение наибольшего значения величины с применением совсем другой идеи.

ЗАДАЧА 103. Цех кондитерской фабрики производит шоколадные батончики двух сортов массой 50 г, расфасованные в коробки по 24 батончика: «Шоколадный» (50% шоколада и 25% орехов) и «Ореховый» (40% шоколада и 50% орехов). Цех получает прибыль от реализации каждой коробки батончиков сортов «Шоколадный» и «Ореховый» в размере 240 р. и 300 р. соответственно. Какую наибольшую прибыль (в рублях) может получить цех, если за смену он может израсходовать не более 108 кг шоколада и 90 кг орехов?

РЕШЕНИЕ. Масса батончиков в одной коробке составляет $50 \cdot 24 = 1200$ (г). Коробка сорта «Шоколадный» содержит 600 г шоколада и 300 г орехов, а коробка сорта «Ореховый» содержит 480 г шоколада и 600 г орехов.

Пусть цех произвёл x коробок батончиков сорта «Шоколадный» и y коробок батончиков сорта «Ореховый», тогда цех израсходовал $600x + 480y$ (г) шоколада и $300x + 600y$ (г) орехов, а прибыль от реализации произведённой продукции составит $P = 240x + 300y$ (р.).

Наибольшая прибыль получится в том случае, если будет произведено целое количество коробок каждого сорта и будет израсходован весь имеющийся запас шоколада и орехов.

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 600x + 480y = 108\,000 \\ 300x + 600y = 90\,000. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $x = 100$ и $y = 100$. Увеличить количество коробок нельзя, так как весь шоколад и все орехи уже израсходованы. Наибольшая прибыль от реализации произведённой продукции составит $P = 240x + 300y = 54\,000$ (р.).

ОТВЕТ: 54 000.

Рассмотрим графическую иллюстрацию приведённого выше решения. По условию задачи должны выполняться два неравенства:

$$600x + 480y \leqslant 108\,000 \text{ и } 300x + 600y \leqslant 90\,000,$$

которые перепишем в виде

$$y \leqslant 225 - \frac{5}{4}x \text{ и } y \leqslant 150 - \frac{1}{2}x.$$

Любая пара натуральных чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющая этим неравенствам, изображается точкой $(x;\ y)$ координатной плоскости, лежащей не выше каждой из прямых:

$$y = 225 - \frac{5}{4}x, \qquad (1)$$

$$y = 150 - \frac{1}{2}x, \qquad (2)$$

т. е. точкой закрашенной области на рисунке 2.

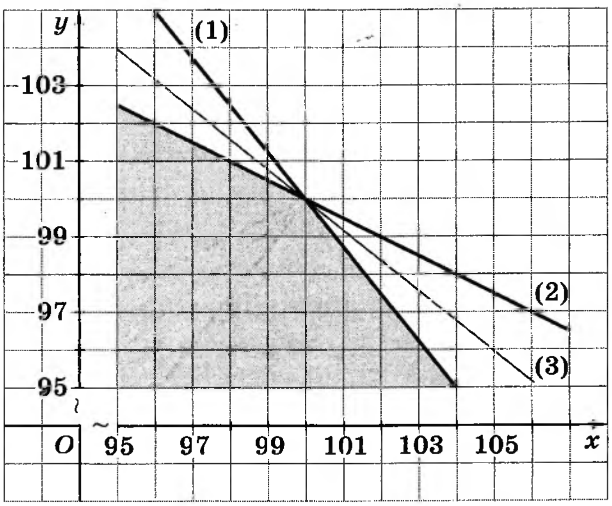

Рис. 2

Прямые (1) и (2) пересекаются в точке (100; 100).

Из равенства $P = 240x + 300y$ выразим y через P и x:

$$y = \frac{P}{300} - \frac{4x}{5}. \qquad (3)$$

Меняя значения P, получим семейство параллельных прямых. Одна из этих прямых (при $P = 54\,000$) проходит через точку (100; 100) пересечения прямых (1) и (2).

Прямые рассматриваемого семейства параллельных прямых, проходящие через точки $(x;\ y)$ закрашенной области с целыми координатами, проходят ниже прямой (3), так как все эти точки расположены ниже прямой (3). Этим прямым соответствуют значения $P < 54\,000$.

ЗАДАЧА 104. В следующий раз тот же цех кондитерской фабрики должен был произвести шоколадные батончики двух сортов при тех же условиях. Какую наибольшую прибыль (в рублях) может получить цех, если за смену он получает не более 120 кг шоколада и 99 кг орехов?

РЕШЕНИЕ. Рассуждая как при решении предыдущей задачи, получим два неравенства:

$$600x + 480y \leqslant 120\,000 \text{ и } 300x + 600y \leqslant 99\,000,$$

которые перепишем в виде

$$y \leqslant 250 - \frac{5}{4}x \text{ и } y \leqslant 165 - \frac{1}{2}x.$$

Любая пара натуральных чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющая этим неравенствам, изображается точкой $(x;\ y)$ координатной плоскости, лежащей не выше каждой из прямых:

$$y = 250 - \frac{5}{4}x, \qquad (4)$$

$$y = 165 - \frac{1}{2}x. \qquad (5)$$

Эти точки с целыми координатами принадлежат закрашенной области (рис. 3).

Прямые (4) и (5) пересекаются в точке $\left(113\frac{1}{3};\ 108\frac{1}{3}\right)$.

Из равенства $P = 240x + 300y$ выразим y через P и x. Получим равенство

$$y = \frac{P}{300} - \frac{4}{5}x. \qquad (6)$$

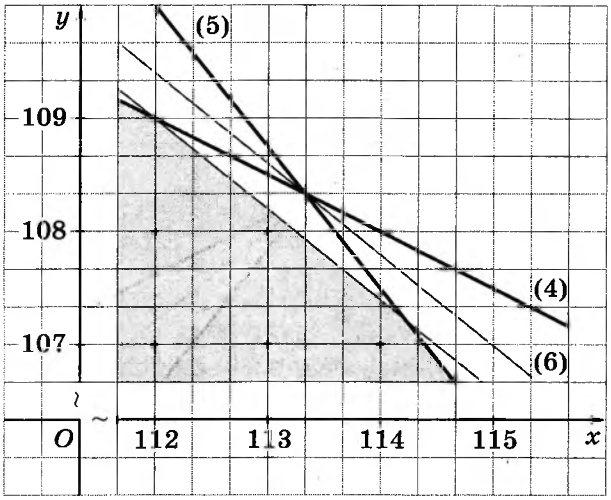

Рис. 3

Меняя значения P, получим семейство параллельных прямых. Одна из этих прямых (при $P = 54\,000$) на рисунке 3 проходит через точку пересечения прямых (3) и (4), но координаты этой точки пересечения — дробные числа.

Найдём наибольшее значение P, при котором прямая (3), задаваемая уравнением $y = \frac{P}{300} - \frac{4}{5}x$, проходит через точку с целыми координатами (на рисунке 3 эти точки выделены). Эта точка имеет координаты (112; 109). Найдём значение P, соответствующее значениям $x = 112$ и $y = 109$:

$$P = 240x + 300y = 240 \cdot 112 + 300 \cdot 109 = 59\,580 \text{ (р.)}.$$

Значение $P = 59\,580$ является наибольшим, так как точки с целыми координатами из закрашенной области лежат ниже прямой $y = \frac{59\,580}{300} - \frac{4}{5}x$.

ОТВЕТ: 59 580 р.

Что день грядущий нам готовит?

Завершим книгу разбором заданий из репетиционных вариантов ЕГЭ-2019 по математике профильного уровня.

ЗАДАЧА 105. Вася взял кредит в банке на сумму 270 200 р. Схема выплата кредита такова: в конце каждого года банк увеличивает на 10 % оставшуюся сумму долга, а затем Вася переводит в банк свой очередной платёж. Известно, что Вася погасил кредит за три года, причём каждый его следующий платёж был ровно втрое больше предыдущего. Какую сумму Вася заплатил в первый раз? Ответ дайте в рублях.

РЕШЕНИЕ. Обозначим сумму кредита буквой a, тогда $a = 270\,200$ (все расчёты приведены в рублях). Пусть платежи в первый, второй и третий годы составили x, $3x$, $9x$ соответственно. В конце первого года долг составил $1{,}1a$, остаток долга после платежа

$$1{,}1a - x.$$

В конце второго года долг составил $1{,}1^2a - 1{,}1x$, остаток долга после платежа

$$1{,}1^2a - 1{,}1x - 3x = 1{,}1^2a - 4{,}1x.$$

В конце третьего года долг составил $1{,}1^3a - 1{,}1 \cdot 4{,}1x = 1{,}1^3a - 4{,}51x$, остаток долга после платежа

$$1{,}1^3a - 4{,}51x - 9x = 1{,}1^3a - 13{,}51x.$$

Так как расчёт с банком завершён, то последний остаток равен нулю. Из уравнения

$$1{,}1^3a - 13{,}51x = 0$$

найдём первый платёж x:

$$x = \frac{1{,}1^3 \cdot 270\,200}{13{,}51} = 26\,620 \text{ (р.)}.$$

ОТВЕТ: 26 620 р.

ЗАДАЧА 106. По вкладу A банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу $Б$ — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад $Б$ окажется выгоднее вклада A при одинаковых суммах первоначальных взносов.

РЕШЕНИЕ. Обозначим первоначальные суммы, положенные на вклад A и на вклад $Б$, буквой a. За три года на вкладе A сумма увеличится до $1{,}1^3a$. На вкладе $Б$ сумма увеличится в первый год до $1{,}08a$, во второй год до $1{,}08ar$, в третий год до $1{,}08ar^2$, где $r = 1 + \frac{n}{100}$ (все расчёты приведены в рублях).

Чтобы за три года хранения вклад $Б$ оказался выгоднее вклада A, должно выполняться неравенство

$$1{,}08ar^2 > 1{,}1^3a,$$
$$r^2 > 1{,}1^3a,$$

из которого получаем, что $r > 1{,}110\ldots$. Наименьшее целое число n, удовлетворяющее этому неравенству, равно 12.

ОТВЕТ: 12.

ЗАДАЧА 107. Бизнес-проект *А* предполагает рост вложенных в него сумм на 34,56 % ежегодно в течение первых двух лет и на 44 % ежегодно в течение следующих двух лет. Проект *Б* предполагает рост процентов на постоянное целое число n ежегодно. Найдите наименьшее значение n, при котором за первые четыре года проект *Б* будет выгоднее проекта *А*.

РЕШЕНИЕ. Пусть a — первоначальная сумма, вложенная в каждый из бизнес-проектов *А* и *Б*, $r = 1{,}3456$, $p = 1 + \frac{n}{100}$.

В проекте *А* вложенная сумма увеличится до ar в первый год, ar^2 во второй год, $1{,}44ar^2$ в третий год и $1{,}44^2ar^2$ в четвёртый год.

В проекте *Б* вложенная сумма увеличится до ap в первый год, ap^2 во второй год, ap^3 в третий год и ap^4 в четвёртый год.

Чтобы за первые четыре года проект *Б* оказался выгоднее проекта *А*, должно выполняться неравенство

$$ap^4 > 1{,}44^2ar^2. \qquad (1)$$

Так как в неравенстве (1) буквами обозначены положительные числа, то из неравенства (1) следует, что

$$p > 1{,}2 \cdot \sqrt{1{,}3456},$$

$$p > 1{,}392,$$

$$1 + \frac{n}{100} > 1{,}392. \qquad (2)$$

Наименьшее целое число n, удовлетворяющее неравенству (2), равно 40.

ОТВЕТ: 40.

ЗАДАЧА 108. Первичная информация разделяется по серверам № 1 и № 2 и обрабатывается на них. С сервера № 1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт обработанной информации, а с сервера № 2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 < t < 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации, равной 3364 Гбайт?

РЕШЕНИЕ. Пусть на сервер № 1 поступает x Гбайт первичной информации, тогда из него выходит $20\sqrt{x}$ Гбайт обработанной информации, причём выполняется неравенство $25 < \sqrt{x} < 55$, т. е. $625 < x < 3025$. На сервер № 2 поступает $3364 - x$ Гбайт первичной информации, из него выходит $21\sqrt{3364 - x}$ Гбайт обработанной информации. Объём информации (в Гбайт), выходящей с двух серверов, выражается формулой

$$f(x) = 20\sqrt{x} + 21\sqrt{3364 - x}.$$

Найдём наибольшее значение функции $f(x)$ на интервале (625; 3025). Производная функции $f(x)$ равна $\frac{20\sqrt{3364 - x} - 21\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{3364 - x}}$. Так как она обращается в нуль в точке $x = 1600$, слева от этой точки положительна, а справа отрицательна, то в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум. Наибольший общий объём выходящей информации равен

$$f(1600) = 20\sqrt{1600} + 21\sqrt{3364 - 1600} = 1682.$$

ОТВЕТ: 1682.

В следующей задаче надо внимательно читать условия и не путать понятия среднемесячного дохода на душу населения и общего дохода.

ЗАДАЧА 109. В регионе A среднемесячный доход на душу населения в 2014 г. составлял 43 740 р. и ежегодно увеличивался на 25%. В регионе $Б$ среднемесячный доход на душу населения в 2014 г. составлял 60 000 р. В течение трёх лет суммарный доход жителей региона $Б$ увеличивался на 17% ежегодно, а население увеличивалось на m% ежегодно. В 2017 г. среднемесячный доход на душу населения в регионах A и $Б$ стал одинаковым. Найдите m.

РЕШЕНИЕ. В регионе A среднемесячный доход на душу населения за три года увеличения на 25% увеличился в $\left(1+\frac{25}{100}\right)^3=\left(\frac{5}{4}\right)^3$ раза и составил $\left(\frac{5}{4}\right)^3\cdot 43\,740=\left(\frac{45}{4}\right)^3\cdot 60$ (все расчёты приведены в рублях).

Пусть в регионе $Б$ в 2014 г. было x жителей, тогда общий доход жителей региона $Б$ в 2014 г. составлял $60\,000x$. За три года увеличения на 17% он увеличился в $1{,}17^3$ раза и составил $1{,}17^3\cdot 60\,000x=11{,}7^3\cdot 60x$.

Число жителей в регионе $Б$ за три года увеличения на m% увеличилось в $\left(1+\frac{m}{100}\right)^3$ раза и составило $x\cdot\left(\frac{100+m}{100}\right)^3$. Тогда среднемесячный доход на душу населения в регионе $Б$ в 2017 г. составил $\dfrac{11{,}7^3\cdot 60x}{x\cdot\left(\frac{100+m}{100}\right)^3}=\dfrac{1170^3\cdot 60}{(100+m)^3}$ и оказался равным $\left(\frac{45}{4}\right)^3\cdot 60$.

Из уравнения $\dfrac{1170^3\cdot 60}{(100+m)^3}=\left(\frac{45}{4}\right)^3\cdot 60$ найдём, что $m=4$.

ОТВЕТ: 4.

Задания для самостоятельного решения

ЗАДАЧА 110. В июле 2016 г. взяли кредит в банке на пять лет в размере S тыс. р. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле 2017, 2018 и 2019 гг. долг остаётся равным S тыс. р.;

— выплаты в 2020 и 2021 гг. равны по 360 тыс. р.;

— к июлю 2021 г. долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

ЗАДАЧА 111. В июле 2016 г. планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн р., где S — целое число. Условия его возврата таковы:

— в январе каждого года долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2016 г.	Июль 2017 г.	Июль 2018 г.	Июль 2019 г.	Июль 2020 г.
Долг (в млн р.)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	$0{,}2S$	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн р.

ОТВЕТЫ

3. 27 000 000 р. **6.** 63 000 р. **10.** а) 6,7%; б) на 200%. **13.** 2005. **17.** На $\frac{(a-b)\cdot 100\%}{a}$.
20. а) 60 км; б) на 20%. **23.** На 45%. **25.** На 100%. **27.** На 10%. **28.** 26%. **33.** $x=68$, $y=63$. **35.** На 508 200 р. **37.** $n=7$ млн р., $m=12$ млн р. **39.** 99 млн р. **41.** 9. **43.** На 50%. **47.** 6 330 000 р. **49.** 201 300 р. **50.** 162 000 р. **51.** 5 000 000 р. **54.** 6 лет. **55.** 9 месяцев. **56.** 5 лет. **59.** 12,5. **62.** 4 000 000 р. **67.** За 6 лет. **82.** 1. **86.** 3. **87.** 300 000 р. **91.** 36. **95.** 660. **96.** 600. **98.** 300. **100.** 240 кг. **102.** 500. **110.** 1 050 000 р. **111.** 7 000 000 р.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ященко И. В., Шестаков С. А.* Я сдам ЕГЭ! Математика. Курс самоподготовки. Технология решения заданий. Профильный уровень. В 3 ч. Ч. 2. Алгебра и начала математического анализа. — М.: Просвещение, 2019.
2. ЕГЭ-2017: Математика: 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену: профильный уровень / под. ред. И. В. Ященко. М.: АСТ, 2017.
3. ЕГЭ-2017: Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под. ред. И. В. Ященко. — М.: Экзамен, 2017.
4. *Прокофьев А. А.* ЕГЭ. Математика. 25 лучших вариантов от «Просвещения». Профильный уровень. — М.: Просвещение, 2019.

СОДЕРЖАНИЕ