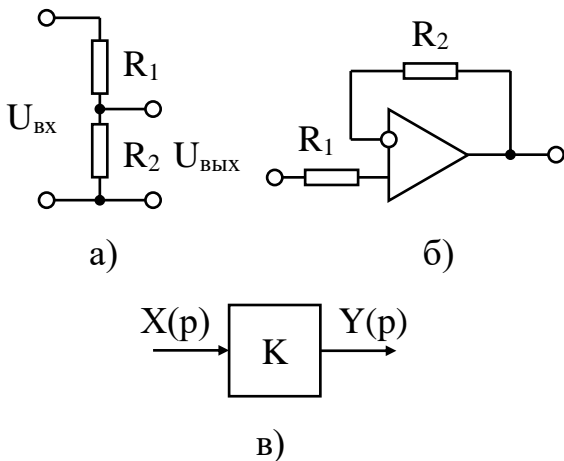


Типовые динамические звенья

Под типовыми динамическими звеньями будем понимать такие звенья, работа которых описывается дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. Таким образом, типовые динамические звенья имеют следующие передаточные функции: K , p^n , $1/p^n$, $Tr\pm 1$, $1/(Tr\pm 1)$, $1/(T^2p^2\pm 2\xi Tr\pm 1)$, $1/(T^2p^2\pm 1)$, и т.д.



Усилительное (пропорциональное, безынерционное) звено

Примером усилительного звена может служить делитель напряжения на двух резисторах (см. рисунок 1 а), усилитель на операционном усилителе (см. рисунок 1б). В первом случае уравнение, описывающее поведение звена будет иметь вид:

$$U_{\text{вых}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{\text{вх}}$$

Рисунок 1 Усилительное звено

Во втором случае:

$$U_{\text{вых}} = \frac{R_2}{R_1} U_{\text{вх}}$$

Оба уравнения можно свести к следующему:

$$U_{\text{вых}} = KU_{\text{вх}},$$

или

$$W(p) = K$$

Усилительное звено обозначается как на рисунке 1в.

Частотные характеристики усилительного звена:

- 1) АФЧХ: $W(j\omega) = K + j0 = Ke^{j0}$
- 2) АЧХ: $A(\omega) = K$
- 3) ФЧХ: $\varphi(\omega) = 0$
- 4) ВЧХ: $P(\omega) = K$
- 5) МЧХ: $Q(\omega) = 0$
- 6) ЛАФЧХ: $L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg K$; $\varphi(\omega) = 0$

Переходная функция:

$$h(t) = L^{-1}[K * 1/p] = K * 1(t)$$

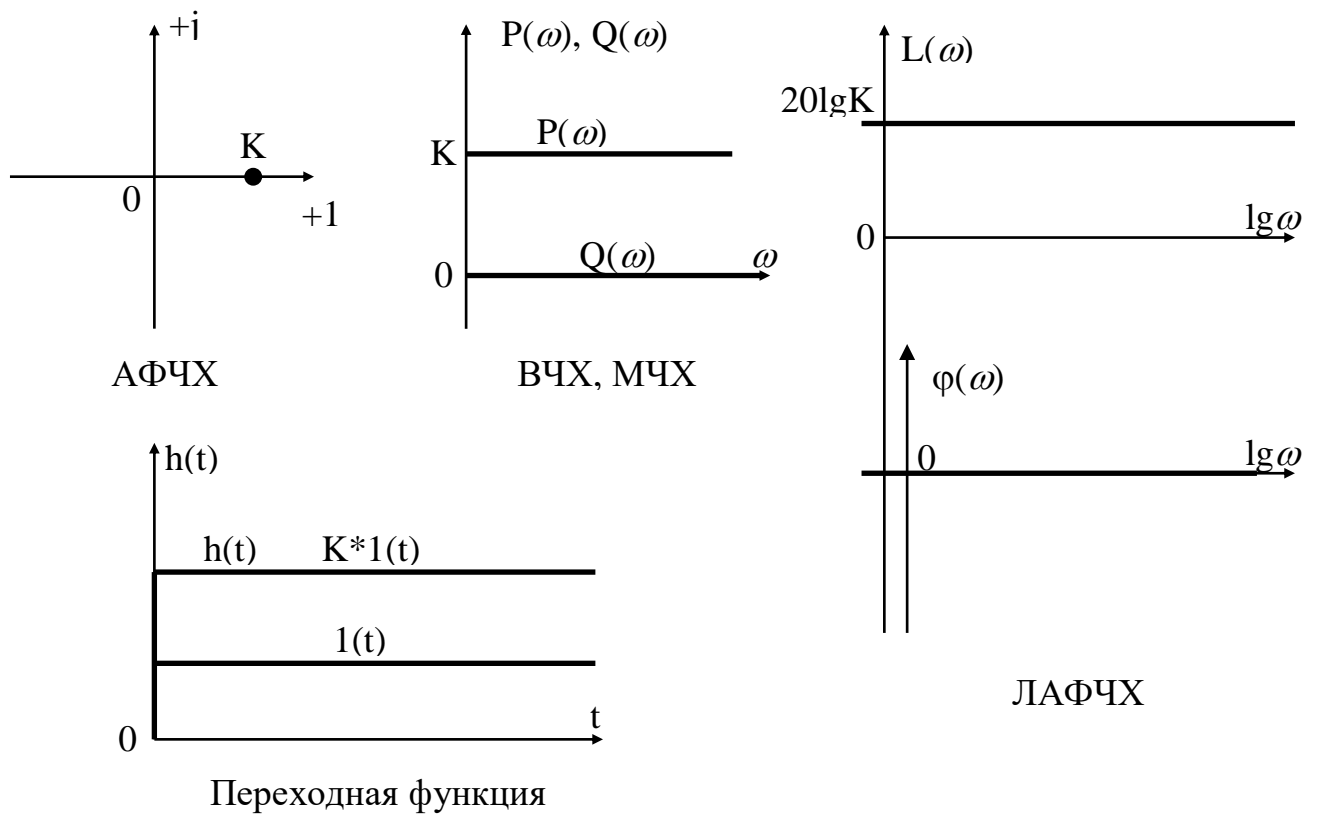


Рисунок 2 Частотные характеристики и переходная функция усилительного звена

Полученные зависимости приведены на рисунке 3.2.

Идеальное интегрирующее звено

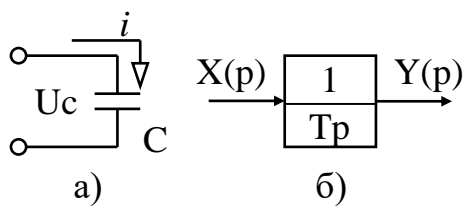


Рисунок 3 Идеальное интегрирующее звено

Примером идеального интегрирующего звена может служить идеальный конденсатор (см. рисунок 3 а), и бассейн с наполняющей трубой. Данное звено интегрирует (суммирует) входной сигнал:

$$U_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) * dt$$

где $i(t)$ – ток через конденсатор (входная величина), $U_c(t)$ – напряжение на нем (выходная величина).

В общем случае

$$y(t) = K \int x(t) * dt ,$$

или

$$\frac{dy(t)}{dt} = Kx(t) - \text{дифференциальное уравнение интегрирующего звена.}$$

После преобразования Лапласа данное уравнение примет вид:

$$Y(p) \cdot p = K \cdot X(p)$$

Передаточная функция:

$$W(p) = \frac{K}{p} = \frac{1}{T \cdot p}$$

где T – постоянная времени интегрирования.

Частотные характеристики звена:

$$1) \text{ АФЧХ: } W(j\omega) = \frac{1}{T \cdot j\omega} = 0 - j \frac{1}{T\omega} = \frac{1}{T\omega} * e^{-90^\circ}$$

$$2) \text{ АЧХ: } A(\omega) = \frac{1}{T\omega}$$

$$3) \text{ ФЧХ: } \varphi(\omega) = -90^\circ$$

$$4) \text{ ВЧХ: } P(\omega) = 0$$

$$5) \text{ МЧХ: } Q(\omega) = -\frac{1}{T\omega}$$

$$6) \text{ ЛАФЧХ: } L(\omega) = 20 \lg(A(\omega)) = 20 \lg \frac{1}{T\omega} = 20 \lg \frac{1}{T} - 20 \lg \omega,$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ.$$

Уравнение для ЛАЧХ перепишем по другому:

$$L(\omega) = 20 \lg 1/T - 20 * l,$$

где l – расстояние по оси абсцисс (в декадах).

Т.о. получается прямая линия с наклоном -20 дБ на декаду (по другому наклон -1), проходящая через точку $\omega = 1/T$ (данная точка называется точкой среза – где ЛАЧХ проходит через ноль).

Переходная функция:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{Tp} * \frac{1}{p} \right] = t * 1(t) * \frac{1}{T}.$$

Полученные зависимости представлены на рисунке 4

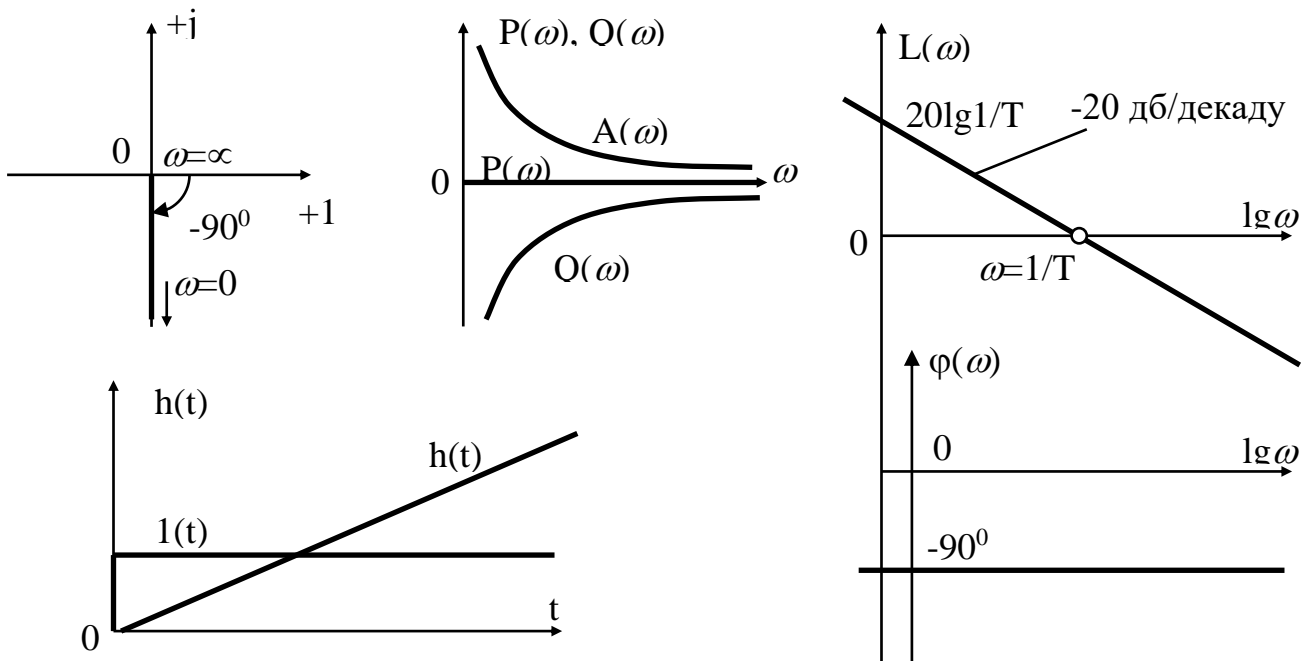


Рисунок 4 Частотные характеристики и переходная функция идеального интегрирующего звена

Идеальное дифференцирующее звено

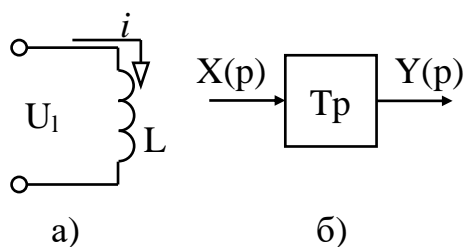


Рисунок 5 Идеальное дифференцирующее звено

Примером идеального дифференцирующего звена может служить идеальная катушка индуктивности (см. рисунок 5а). При этом входной величиной будет являться ток I , а выходным – напряжение на катушке U_1 . При этом:

$$U_1 = L \frac{di}{dt}.$$

В общем случае

$$y(t) = K \frac{dx(t)}{dt}.$$

Определим передаточную функцию:

$$Y(p) = K * X(p) * p,$$

$$W(p) = K * p = T * p,$$

где T – постоянная времени дифференцирования.

Частотные характеристики идеального дифференцирующего звена:

1) АФЧХ: $W(j\omega) = T * i\omega = 0 + jT\omega = T\omega * e^{j90}$

2) АЧХ: $A(\omega) = T\omega$

3) ФЧХ: $\varphi(\omega) = 90^0$

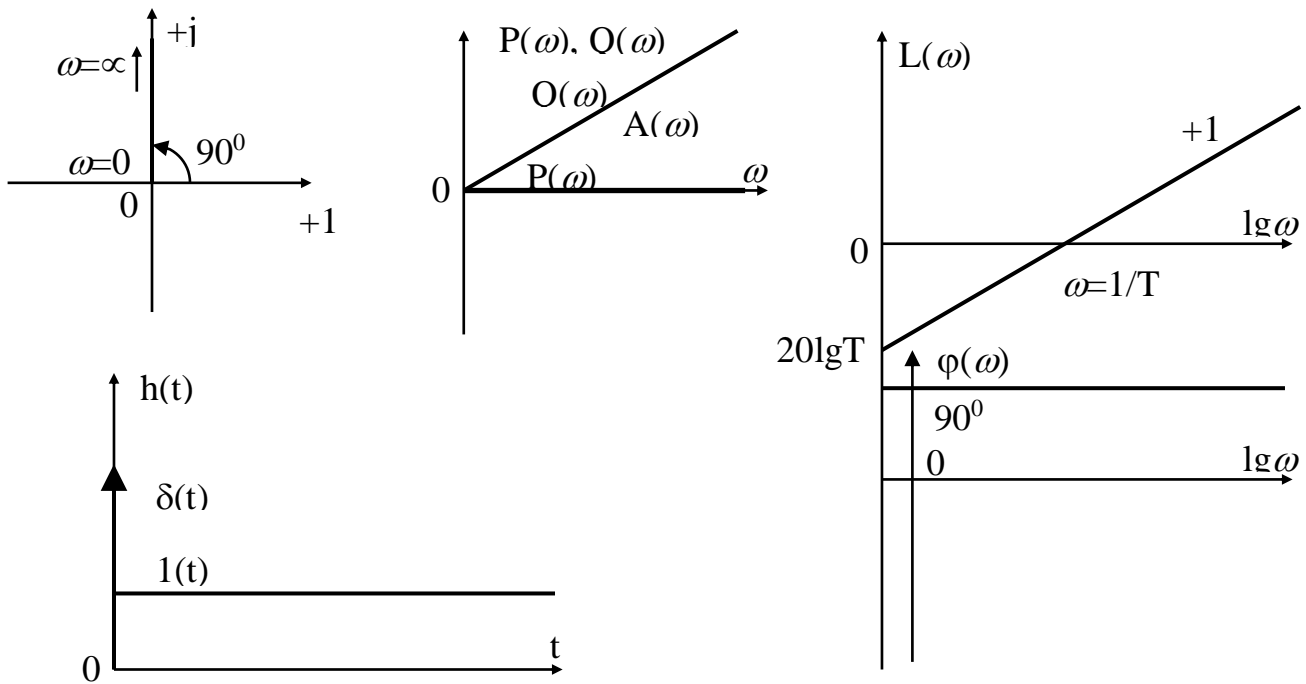


Рисунок 6 Частотные характеристики и переходная функция идеального дифференцирующего звена

4) ВЧХ: $P(\omega)=0$

5) МЧХ: $Q(\omega)=T\omega$

6) ЛАФЧХ: $L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg(T\omega)=20\lg T+20\lg \omega$; $\varphi(\omega)=90^\circ$

Уравнение для ЛАЧХ перепишем по другому:

$$L(\omega)=20\lg T+20\lg \omega,$$

где l – расстояние по оси абсцисс (в декадах).

Т.о. получается прямая линия с наклоном $+20$ дБ на декаду (по другому наклон $+1$) (в отличие от предыдущего звена), проходящая через точку $\omega=1/T$.

Переходная функция:

$$h(t)=L^{-1}[Tp*1/p]=\delta(t)*T.$$

Апериодическое (инерционное) звено 1-го порядка:

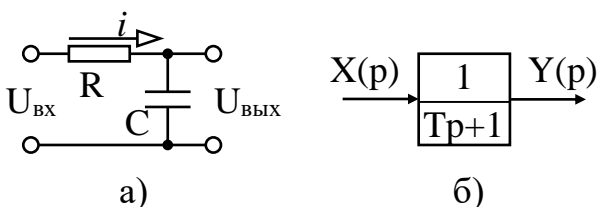


Рисунок 4.7 Апериодическое звено 1-го порядка

Примером инерционного звена может служить RC цепочка (см. рисунок 7а), амортизатор у автомашины и др. Для RC цепочки справедливо:

$$U_{\text{вх}}(t) = U_R(t) + U_C(t) = i(t) * R + \frac{1}{C} \int i(t) * dt$$

После преобразования Лапласа:

$$U_{BX}(p) = I(p) * R + I(p) \frac{1}{Cp}$$

Следовательно:

$$U_{ВЫХ}(p) = I(p) \frac{1}{Cp} = \frac{U_{BX}}{RCp+1}$$

В общем случае

$$Y(p) = X(p) \frac{1}{Tp+1}$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{Tp+1},$$

где T – постоянная времени апериодического звена.

Частотные характеристики инерционного звена:

$$1) \text{ АФЧХ: } W(j\omega) = \frac{1}{jT\omega+1} = \frac{1-jT\omega}{1+T^2\omega^2} = \frac{1}{1+(T\omega)^2} + j \frac{-T\omega}{1+(T\omega)^2};$$

$$2) \text{ АЧХ: } A(\omega) = \sqrt{\frac{1+\omega^2T^2}{(\omega^2T^2+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2T^2+1}};$$

$$3) \text{ ФЧХ: } \varphi(\omega) = \arctg(-\omega T) = -\arctg(\omega T);$$

$$4) \text{ ВЧХ: } P(\omega) = \frac{1}{\omega^2T^2+1};$$

$$5) \text{ МЧХ: } Q(\omega) = -\frac{\omega T}{\omega^2T^2+1};$$

Можно составить следующее уравнение:

$$P(\omega) = 1/(1+Q(\omega)^2/P(\omega)^2).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} P^2+Q^2-P &= 0, \\ P^2-2*1/2*P+1/4+Q^2 &= 1/4, \\ (P-1/2)^2+Q^2 &= 1/4. \end{aligned}$$

Уравнение круга:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

где (x_0, y_0) – координаты центра круга,

R – радиус круга.

Т.о. АФЧХ будет иметь форму круга с центром в точке $(1/2, 0)$ с радиусом, равным $1/2$.

$$6) \text{ ЛАФЧХ: } L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{\omega^2T^2+1}} = 20 \lg 1 - 20 \lg \sqrt{\omega^2T^2+1} = -20 \lg \sqrt{\omega^2T^2+1}$$

Пусть:

- $\omega T \gg 1$, тогда $L(\omega) \approx -20 \lg \omega T$ – прямая линия с наклоном -20 дБ на декаду, проходящая через точку $\omega = 1/T$;
- $\omega T \ll 1$, тогда $L(\omega) \approx -20 \lg 1 = 0$.

Таким образом, ЛАФЧХ апериодического звена можно построить аппроксимированным методом с помощью двух прямых, пересекающихся в точке $\omega = 1/T$. Такая точка называется *точкой сопряжения* (иногда такую точку называют *полюсом*).

Алгоритм построения ЛАЧХ инерционного звена аппроксимированным способом:

- 1) ищется точка сопряжения $\omega = 1/T$;
- 2) слева от этой точки ЛАЧХ представляет собой линию с наклоном 0 и со значением 0 дБ.
- 3) справа от этой точки ЛАЧХ представляет собой прямую линию с наклоном -20 дБ/декаду (наклон -1) и проходящую через точку сопряжения.

Найдем максимальную ошибку такого построения, которая, очевидно, будет в точке сопряжения:

$$\Delta L = -20 \lg \sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 T^2 + 1} = -20 \lg \sqrt{2} \approx \underline{-3 \text{ дБ}}$$

ЛФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \arctg(Q(\omega)/P(\omega)) = -\arctg(\omega T).$$

В точке сопряжения фаза апериодического звена равна -45° . Фаза плавно убывает от 0 до -90° при изменении частоты от 0 до ∞ . ЛФЧХ также можно построить аппроксимированным способом, хотя это не так часто применяется как в случае ЛАЧХ. Алгоритм построения:

- 1) находится точка сопряжения $\omega = 1/T$;
- 2) в точке сопряжения значение ЛФЧХ равно -45 град;
- 3) слева и справа от точки сопряжения откладывается по 1 декаде
- 4) в пределах этих двух декадах значение ЛФЧХ убывает от 0 град (начало левой декады) до -90 град (конец правой декады);
- 5) слева от этого участка значение ЛФЧХ равно 0 град.;
- 6) справа от этого участка значение ЛФЧХ равно -90 град.

Переходная функция¹:

¹ Любую передаточную функцию можно представить в виде отношения двух полиномов:

$$W(p) = M(p)/N(p).$$

Если знаменатель имеет неповторяющиеся корни (и не комплексно-сопряженные), то ищется производная знаменателя и определяется оригинал:

$$h(t) = L^{-1}[1/(Tp+1) * 1/p] = 1 - e^{-t/T}$$

В таблице 4.1 приведены некоторые значения переходной функции в различное время переходного процесса.

Таблица 4.1

t	T	2T	3T	4T	5T
h(t)	0.63	0.865	0.95	0.98	0.99

Как видно из таблицы 4.1 переходной процесс заканчивается примерно через время, равное (3-4)T.

Рассчитанные величины представлены на рисунке 8

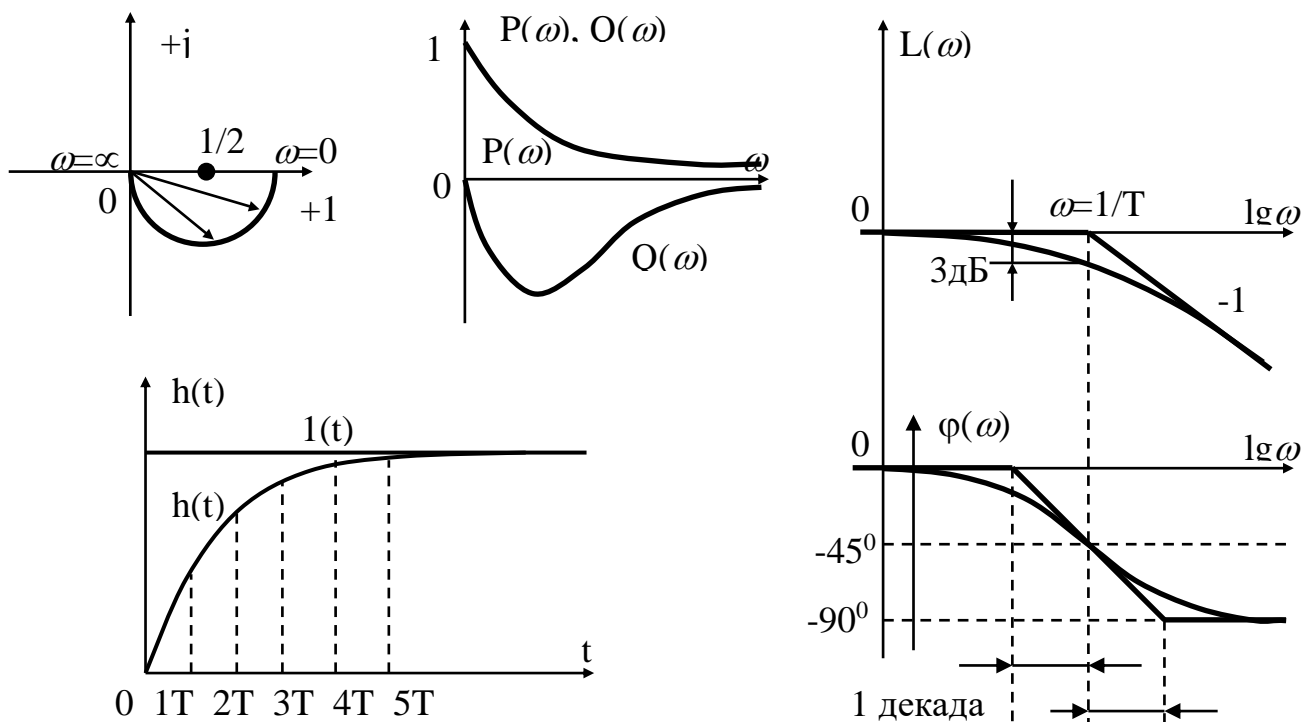


Рисунок 8 Частотные характеристики и переходная функция инерционного звена

$$h(t) = \sum_{i=1}^k \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} e^{p_i t}$$

где p_i – корни знаменателя,
 k – число корней знаменателя

Дифференциальное звено первого рода (форсирующее)

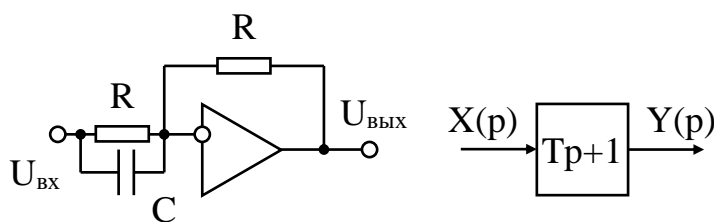


Рисунок 4.9 Форсирующее звено

Примером форсирующего звена может служить схема, изображенная на рисунке 9. Для нее справедливо

$$W(p) = R / (R \parallel 1/Cp) = (RCp + 1) = Tp + 1$$

В общем случае передаточная функция

$$W(p) = (Tp + 1),$$

где T – постоянная времени форсирующего звена.

Частотные характеристики форсирующего звена:

1) АФЧХ: $W(j\omega) = (jT\omega + 1)$

2) АЧХ: $A(\omega) = \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$

3) ФЧХ: $\varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega T)$

4) ВЧХ: $P(\omega) = 1$

5) МЧХ: $Q(\omega) = \omega T$

6) ЛАФЧХ: $L(\omega) = 20 \lg \sqrt{\omega^2 T^2 + 1}$

Пусть:

- $\omega T \gg 1$, тогда $L(\omega) \approx 20 \lg \omega T$ – прямая линия с наклоном +20 дБ на декаду, проходящая через точку $\omega = 1/T$
- $\omega T \ll 1$, тогда $L(\omega) \approx 20 \lg 1 = 0$.

Таким образом, ЛАФЧХ форсирующего звена можно построить аппроксимированным методом с помощью двух прямых, пересекающихся в точке $\omega = 1/T$. Максимальная ошибка будет как и в случае с апериодическим звеном в точке перегиба и равна 3 дБ. Алгоритм построения ЛАФЧХ аналогичен алгоритму для апериодического звена с учетом знака для ЛАЧХ и ЛФЧХ.

ЛФЧХ имеет вид:

$$\varphi(\omega) = \text{arctg}(Q(\omega)/P(\omega)) = \text{arctg}(\omega T).$$

В точке сопряжения фаза апериодического звена равна 45° . Фаза плавно возрастает от 0 до 90° при возрастании частоты от 0 до ∞ .

Переходная функция:

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{Tp+1}{p}\right] = L^{-1}\left[T + \frac{1}{p}\right] = T * \delta(t) + 1(t)$$

Как видно, форсирующее звено сочетает в себе свойства усилительного и идеального дифференцирующего звеньев.

Рассчитанные характеристики показаны на рисунке 10.

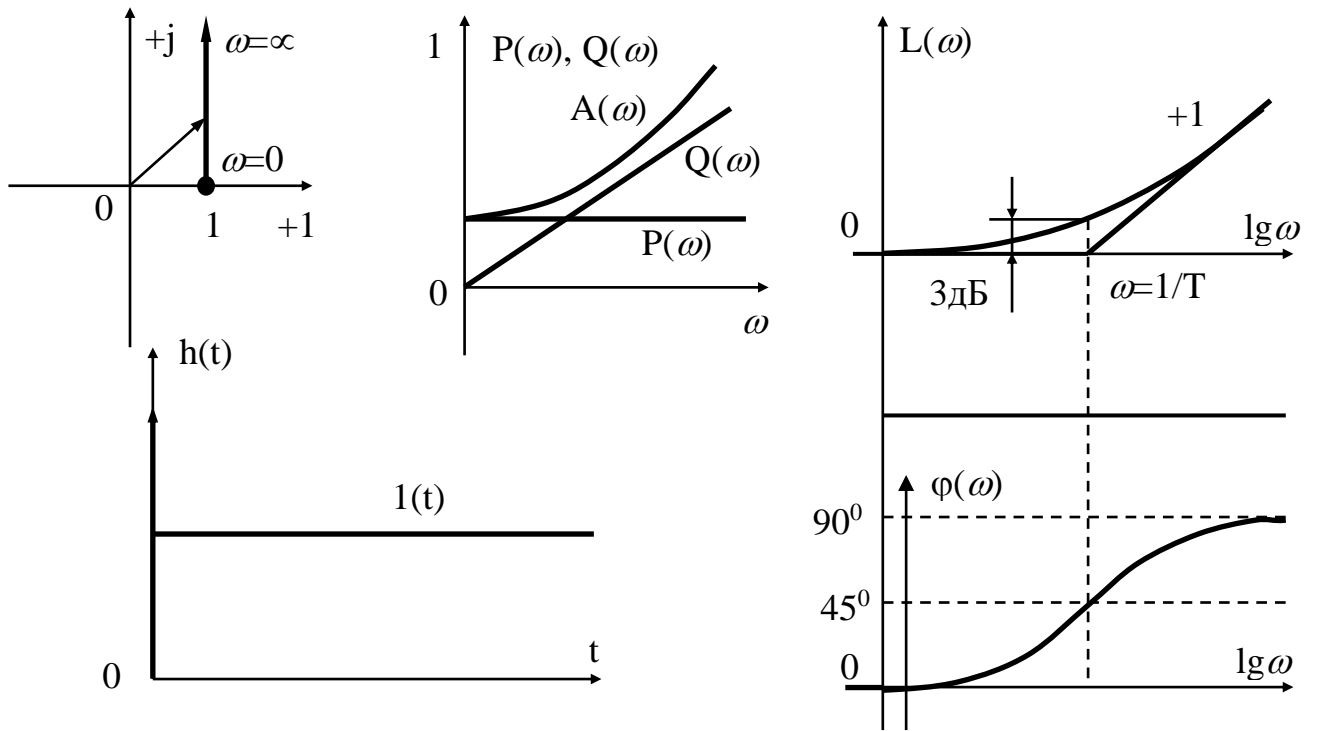


Рисунок 10 Частотные характеристики и переходная функция форсирующего звена

Апериодическое (колебательное) звено 2-го порядка

Примером колебательного звена может служить колебательный контур (см. рисунок 11а), груз, подвешенный на пружине и др. Для колебательного звена справедливо:

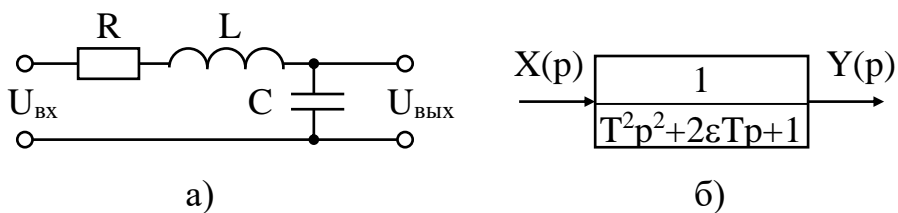


Рисунок 11 Колебательное звено

$$u_{BX} = i(t) * R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt,$$

После преобразования Лапласа получаем:

$$U_{BX}(p) = I(p) * R + L * I(p) * p + \frac{I(p)}{Cp},$$

$$U_{ВЫХ}(p) = I(p) \frac{1}{Cp} = \frac{U_{BX}(p)}{RCp + LCp^2 + 1},$$

$$W(p) := \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}.$$

В общем случае передаточная функция колебательного звена:

$$W(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\varepsilon Tp + 1},$$

где T – постоянная времени ,

ε - коэффициент затухания.

В нашем случае

$$T = \sqrt{LC},$$

$$\varepsilon = RC / 2\sqrt{LC}.$$

Вообще не все звенья, передаточные функции которых представлены как показано выше, являются колебательными. Если $\varepsilon > 1$, то знаменатель можно разбить на произведение двух выражений. Т.о. в данном случае получается два апериодических звена. Следовательно, колебательным звеном называется такое звено, у которого $0 < \varepsilon < 1$.

Частотные характеристики колебательного звена:

1) АФЧХ:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{-T^2\omega^2 + j2\varepsilon T\omega + 1} = \frac{(1 - T^2\omega^2) - j2\varepsilon T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\varepsilon T\omega)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\varepsilon T\omega)^2}} e^{j - \arctg \frac{2\varepsilon T\omega}{1 - T^2\omega^2}} \end{aligned}$$

$$2) \text{ АЧХ: } A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\varepsilon T\omega)^2}} ;$$

$$3) \text{ ФЧХ: } \varphi(\omega) = - \arctg \frac{2\varepsilon T\omega}{1 - T^2\omega^2} ;$$

$$4) \text{ ВЧХ: } P(\omega) = \frac{(1 - T^2\omega^2)}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\varepsilon T\omega)^2} ;$$

$$5) \text{ МЧХ: } Q(\omega) = \frac{-j2\varepsilon T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\varepsilon T\omega)^2} ;$$

$$6) \text{ ЛАФЧХ: } L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2\varepsilon T\omega)^2}} =$$

$$= -20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\varepsilon T \omega)^2};$$

Пусть:

- а) $\omega T \ll 1$, тогда $L(\omega) \approx -20 \lg 1 = 0$.
- б) $\omega T \gg 1$, тогда $L(\omega) \approx -40 \lg \omega T$ – прямая линия с наклоном -40 дБ на декаду, проходящая через точку $\omega = 1/T$;
- в) $\omega = 1/T$, тогда $L(\omega) = -20 \lg 2\varepsilon$

Значения ЛАФЧХ в точке сопряжения при различных значениях параметра ε показаны в таблице 2

Таблица 2

ε	$L(\omega)$
0.5	0
0.05	20
1	-6

Таким образом, ЛАФЧХ колебательного звена можно построить аппроксимированным методом с помощью двух прямых, пересекаемых в точке $\omega = 1/T$ если $\varepsilon > 0.4$. В противном случае нужно строить:

- используя формулы для $L(\omega)$;
- используя специальные поправочные графики, приведенные в литературе.

ЛФЧХ:

$$\varphi(\omega) = - \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon T \omega}{1 - T^2 \omega^2}.$$

В точке сопряжения фаза апериодического звена равна -90° . Фаза плавно убывает от 0 до -180° тем резче, тем меньше ε .

Переходная функция:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{p(T^2 p^2 + 2\varepsilon T p + 1)} \right].$$

Корни знаменателя:

$$p_1 = 0, \\ p_{1,2} = \frac{-2\varepsilon T \pm j2T\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2T^2} = -\frac{\varepsilon}{T} \pm j \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}.$$

Производная числителя:

$$N' = 3T^2 p^2 + 4\varepsilon T p + 1.$$

Тогда:

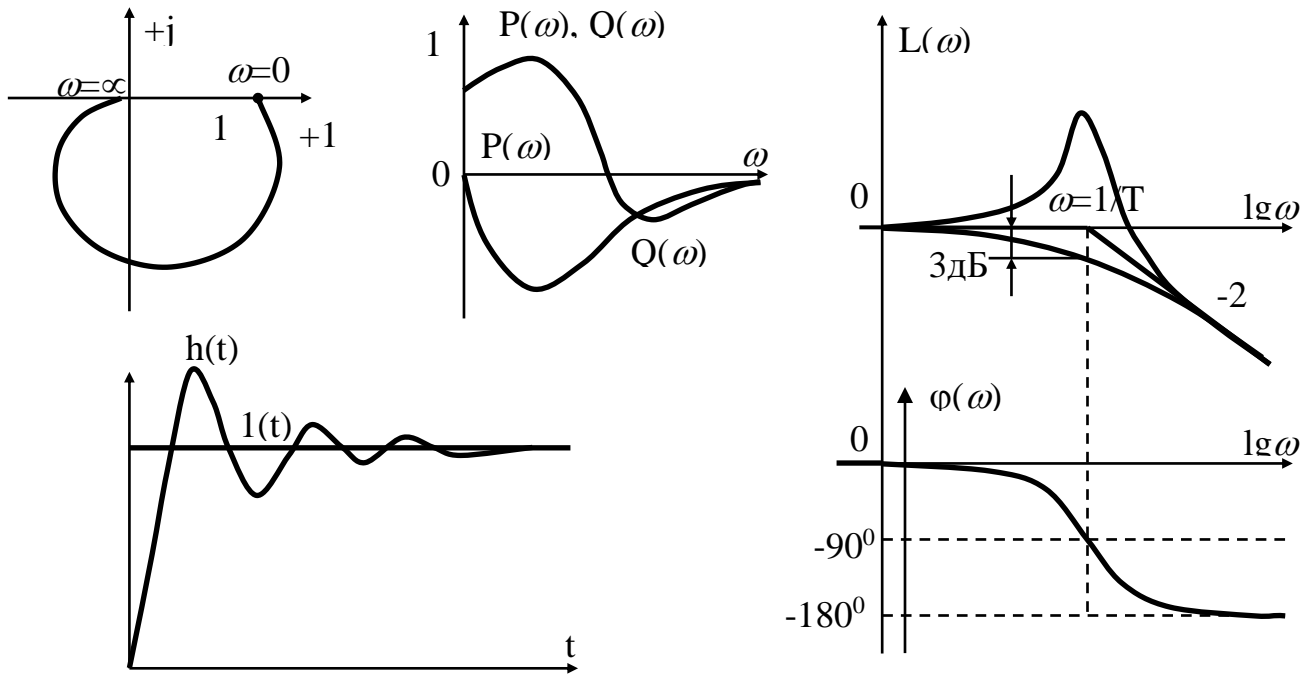


Рисунок 12 Частотные характеристики и переходная функция колебательного звена

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{M(p)}{N'(p)} \right|_{p_1} &= \frac{1}{3(-\varepsilon + j\sqrt{1-\varepsilon^2})^2 + 4\varepsilon(-\varepsilon + j\sqrt{1-\varepsilon^2}) + 1} = \frac{1}{-2(1-\varepsilon^2) - 2j\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} \\
 &= \frac{1e^{j90^\circ}}{-j2(1-\varepsilon^2) + 2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} e^{j\arctg\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} + 90^\circ} \\
 h(t) &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}t + \arctg\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} + 90^\circ\right) = \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}t + \arctg\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)
 \end{aligned}$$