1 Устойчивость САУ

1.1 Условия устойчивости

Под устойчивостью понимается способность системы возвращаться к установившемуся режиму работы после приложения или снятия внешних воздействий. На рисунке 1.1 показаны примеры устойчивой, неустойчивой системы и находящейся на границе устойчивости. Очевидно, что в устойчивой системе после приложения и снятия воздействия f система возвратиться в исходное положение (рисунок 1.1). В неустойчивой системе после приложения и снятия воздействия f система уже никогда не придет в устойчивое состояние. В системе же, находящейся на границе устойчивости, после приложения и снятия воздействия f система придет в другое, отличное от первоначального, устойчивое положение.

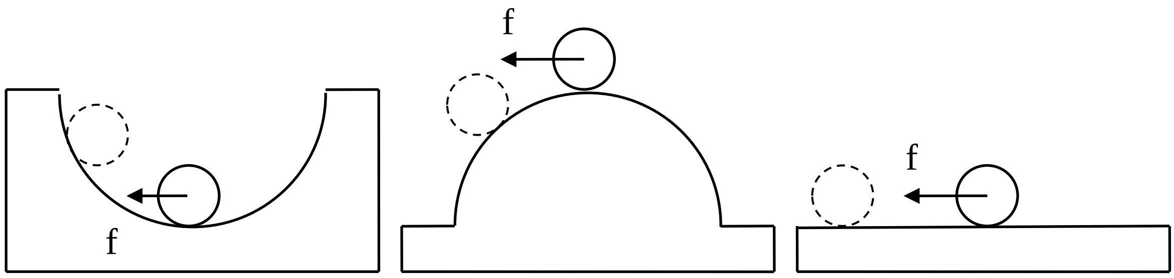


Рисунок 1.1

Любая система будет устойчивой, если переходные процессы, вызванные внешними воздействиями, с течением времени будут затухать.

Поведение любой системы математически записывается в виде

$$Y(t) = y_{св}(t) + y_{пр}(t), \qquad (1.1)$$

где $y_{св}(t)$ – свободная составляющая выходной координаты, которая характеризует переходной процесс,

$y_{пр}(t)$ – принужденная составляющая выходной координаты, которая характеризует закон изменения выходной координаты после окончания переходного процесса. Другими словами данная составляющая определяет поведение системы при приложении возмущающего воздействия.

Свободная составляющая находится по формуле:

$$y_{св}(t) = \sum_{1}^{n} A_i \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \psi_i), \qquad (1.2)$$

где A_i - коэффициент, зависящий от начальных условий,

α_i - действительная часть корней характеристического уравнения [1],

ω_i, ψ_i - соответственно мнимая часть корней характеристического уравнения и начальная фаза, определяемая из начальных условий.

Из уравнения (6.2) следует, что система будет устойчивая, если все действительные составляющие корней характеристического уравнения α_i будут отрицательными. Если хотя бы один действительный корень α_i будет положительным, то соответствующая экспонента будет с течением времени бесконечно возрастать.

Исходя из этого предположения, русским ученым Ляпуновым были сформулированы следующие основные теоремы устойчивости.

Теорема 1. Если все действительные составляющие корней характеристического уравнения математической модели САУ отрицательные, то реальная система будет устойчивой, и никакие малые неучтенные параметры не изменят устойчивости системы.

Теорема 2. Если хотя бы одна действительная составляющая корней характеристического уравнения математической модели САУ будет положительной (при прочих отрицательных), то реальная система будет неустойчивой, и никакие малые неучтенные параметры не приведут систему к устойчивости.

Теорема 3. Если хотя бы одна действительная часть корней характеристического уравнения математической модели САУ будет нулевой при прочих отрицательных, то реальная система будет находиться на границе устойчивости (система нейтральная), и любые малые неучтенные параметры могут сделать систему как устойчивой, так и неустойчивой.

Таким образом, для определения устойчивости необходимо определить только знак действительных составляющих корней характеристического уравнения системы, не вычисляя полного значения корней уравнения.

Решение данной задачи упрощается, используя частотные методы анализа характеристического уравнения.

1.2 Принцип аргумента

Определение устойчивости частотными методами основан на вспомогательной теореме, известной как принцип аргумента.

Пусть характеристическое уравнение системы имеет следующий вид и найдены корни этого уравнения:

$$Q(p) = q_n \cdot p^n + q_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots q_1 \cdot p + q_0 = q_n \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdots (p - p_n), \quad (1.3)$$

где $p_i = \alpha_i + j \cdot \omega_i$ - корни характеристического уравнения Q(p) = 0.

---

[1] Характеристическое уравнение это уравнение вида N(p)=0, где N(p) является знаменателем передаточной функции системы:

$$W(p) = \frac{M(p)}{N(p)}.$$

Амплитудная и фазочастотная характеристика характеристического уравнения запишется в виде

$$Q(j\omega)=q_n(j\omega-(\alpha_1+j\omega_1))\cdot(j\omega-(\alpha_2+j\omega_2))\ldots(j\omega-(\alpha_n+j\omega_n))=$$
$$=q_n\cdot A_1(\omega)\cdot e^{j\varphi_1(\omega)}\cdot A_2(\omega)\cdot e^{j\varphi_2(\omega)}\ldots\cdot A_n(\omega)\cdot e^{j\varphi_n(\omega)}=q_n\prod_{i=1}^{n}A_i(\omega)\cdot e^{j\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\omega)}. \quad (1.4)$$

При изменении частоты изменяется и амплитуда и фаза. Определим, как изменяется фаза, при изменении частоты от - ∞ до + ∞.

Пусть один из корней имеет отрицательную действительную часть (например $p_1=\alpha_1+j\cdot\omega_1$). Вектор этого корня в комплексной плоскости расположен слева от мнимой оси (в левой полуплоскости) (рисунок 1.2).

При изменении частоты от - ∞ до + ∞ вектор $(j\omega-(\alpha_1+j\cdot\omega_1))$ будет скользить по мнимой оси и повернется против часовой стрелки (в положительном направлении) на угол плюс π радиан.

$$\varphi_{-\infty\langle\omega\langle\infty}(\omega)=\arg(p-p_1)=\pi. \quad (1.5)$$

Если таких корней будет «k» и фаза каждого вектора повернется на угол π, то результирующий вектор повернется против часовой стрелки на угол k·π радиан.

Пусть один из корней имеет положительную часть (например $p_2=\alpha_2+j\cdot\omega_2$). Вектор этого корня в комплексной плоскости расположен справа от мнимой оси (в правой полуплоскости) (рисунок 1.2).

При изменении частоты от - ∞ до + ∞ вектор $(j\omega-(\alpha_2+j\cdot\omega_2))$ будет скользить по мнимой оси и повернется по часовой стрелки (в отрицательном направлении) на угол -π радиан.

Если таких корней будет «*l*» и фаза каждого вектора повернется на угол -π, то результирующий вектор повернется по часовой стрелки на угол –*l*·π радиан.

Таким образом, фаза характеристического уравнения при изменении частоты от - ∞ до + ∞ повернется угол «k·π - *l*·π» радиан. Учитывая, что

$$n = k+l,$$

получается

$$\sum\varphi_{-\infty\langle\omega\langle\infty}(\omega)=k\cdot\pi-l\cdot\pi=n\cdot\pi-2\cdot l\cdot\pi. \quad (1.7)$$

Если диапазон изменения частоты уменьшить в 2 раза, то

$$\sum_{0\le\omega<\infty}\varphi(\omega)=n\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot l\cdot\frac{\pi}{2}. \quad (1.8)$$

Итак, *принцип аргумента* можно сформулировать так:

Аргумент (фаза) характеристического уравнения при изменении частоты от 0 до ∞ изменяется на угол $n \cdot \pi / 2 - 2 \cdot l \cdot \pi / 2$ радиан.

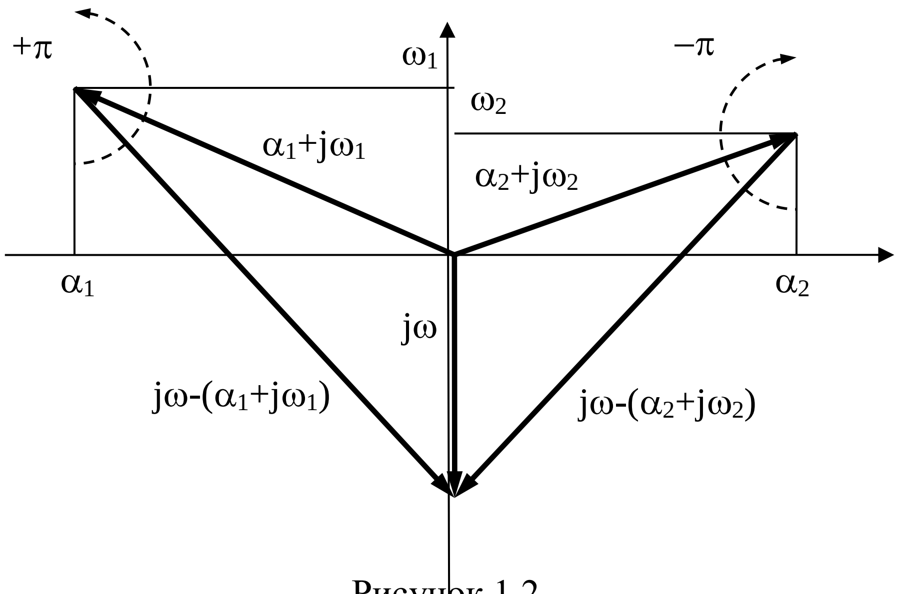


Рисунок 1.2

1.3 Критерий устойчивости Михайлова

Критерий позволяет упростить принцип аргумента при анализе устойчивости.

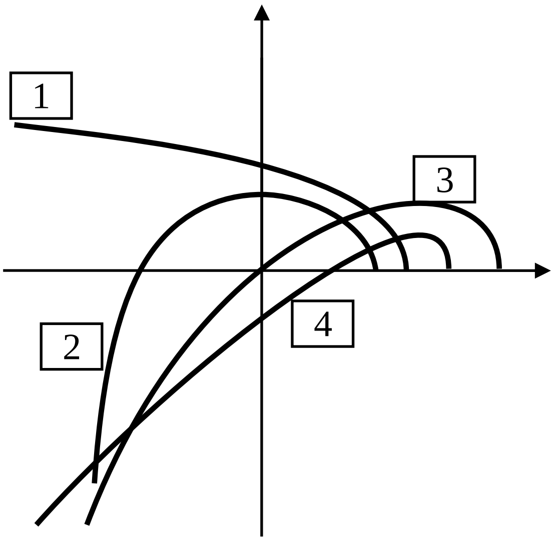
Из принципа аргумента следует, что, если система устойчивая, то аргумент (фаза) характеристического уравнения при изменении частоты от 0 до ∞ изменяется на угол $n \cdot \pi / 2$ радиан. Исходя из этого, советским ученым Михайловым А.В. в 1938 году был сформулирован условие (критерий) устойчивости.

Для устойчивости САУ необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении частоты ω от 0 до ∞ начинался при ω = 0 на вещественной положительной полуоси комплексной плоскости и обходил только против часовой стрелки (в положительном направлении) последовательно n квадрантов, где n –порядок характеристического уравнения системы.

Если нарушается порядок прохождения квадрантов, то система будет неустойчива.

Если годограф проходит через начало координат, то система нейтральная (на границе устойчивости) и любые малые неучтенные параметры могут привести систему как к устойчивому состоянию, так и сделать систему неустойчивой

Примеры годографов устойчивых и неустойчивых систем приведены на рисунке 1.3.



1 – устойчивая система (n=2)
2 – устойчивая система (n=3)
3 – граница устойчивости
4 – неустойчивая система

Рисунок 1.3

1.4 Критерий устойчивости Найквиста

Передаточная функция замкнутой САУ записывается в виде:

$$W_{зам} = \frac{W_p}{1 + W_p}. \qquad (1.9)$$

Из формулы (6.9) следует, что об устойчивости замкнутой САУ можно судить по передаточной функции разомкнутой. С помощью принципа аргумента и критерия Михайлова можно определить устойчивость замкнутой системы по характеристическому уравнению $1+W_p$, в которое входит передаточная функция разомкнутой системы.

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$1 + W_p(p) = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{R(p) + Q(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}, \qquad (1.10)$$

где Q(p) – характеристическое уравнение разомкнутой САУ,

D(p) - характеристическое уравнение замкнутой САУ.

Практически для всех систем характерно, что порядок числителя передаточной функции не больше порядка знаменателя. На основании этого получаем, что порядки характеристических уравнений Q(p) и D(p) равны.

На основании принципа аргумента, годографы устойчивых разомкнутой и замкнутой САУ повернутся при изменении частоты ω от 0 до ∞ на угол $n \cdot \pi / 2$ радиан, следовательно, годограф 1+W(jω):

$$1+W_p(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{D}(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{Q}(\mathrm{j}\omega)}=\frac{D(\omega)\cdot e^{j\varphi_D(\omega)}}{Q(\omega)\cdot e^{j\varphi_Q(\omega)}}=\frac{D(\omega)}{Q(\omega)}\cdot e^{j(\varphi_D(\omega)-\varphi_Q(\omega))} \qquad (1.11)$$

повернется на угол:

$$\varphi_{\mathrm{D}}(\omega)-\varphi_{\mathrm{Q}}(\omega)=\mathrm{n}\cdot\frac{\pi}{2}-\mathrm{n}\cdot\frac{\pi}{2}=0. \qquad (1.12)$$

Этот вывод проиллюстрируем на комплексной плоскости. Строится АФЧХ передаточной функции разомкнутой САУ (рисунок 6.4). Отложим единичный вектор с координатами (-1, j0; 0, j0). Тогда вектор $1+W_p(j\omega)$ при

изменении частоты ω от 0 до ∞ на угол 0 градусов.

Другими словами годограф W_p не будет охватывать точку (-1,j0) (рисунок 1.4а).

Если замкнутая система не будет устойчива при устойчивой разомкнутой, то условие (6.12) не будет выполняться, и вектор $1+W_p$ будет поворачиваться вокруг своей оси (рисунок 1.4б) при изменении частоты от 0 до ∞. Другими словами годограф W_p в этом случае охватывает точку с координатами (-1,j0).

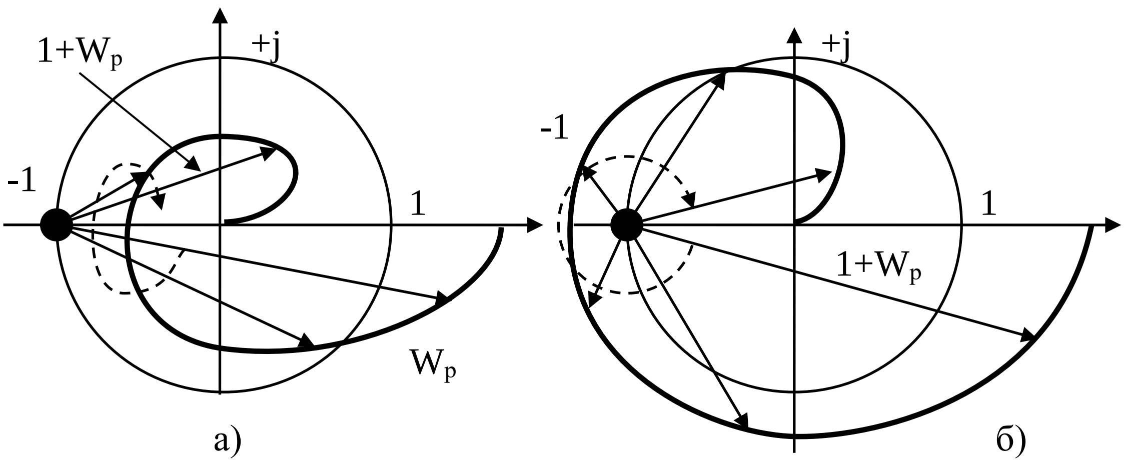


Рисунок 1.4

Критерий Найквиста формулируется так:

Замкнутая система устойчивая, если годограф устойчивой разомкнутой САУ при изменении частоты ω от 0 до ∞ не охватывает точку с координатами -1, j0.

Таким образом, точка с координатами -1, j0 является границей устойчивости. Соответственно прохождение годографа W_p через эту точку означает, что замкнутая система будет находиться на границе устойчивости.

С физической точки зрения критерий Найквиста заключается в том, что при увеличении частоты входного воздействия сигнал цепи обратной связи оказывается в противофазе с входным. А это означает, что отрицательная обратная связь становится положительной, и любое увеличение сигнала на выходе приводит к увеличению сигнала на входе по цепи обратной связи, что вызывает дальнейшее увеличение выходного сигнала и т.д., система теряет устойчивость.

Критерий Найквиста позволяет ввести так называемые *запасы устойчивости по амплитуде и по фазе*.

Запас устойчивости по амплитуде показывает, во сколько раз можно увеличить коэффициент усиления разомкнутой системы без введения дополнительного фазового сдвига, чтобы система пришла на границу устойчивости.

Запас устойчивости по амплитуде показан на рисунках 6.5а и определяется из формулы

$$\Delta h = \left.\frac{1}{\left|W_p(j\omega)\right|}\right| \text{при}\, \varphi_p(\omega) = \pm 180^0 \,. \qquad (1.13)$$

Запас устойчивости по фазе показывает, какой дополнительный фазовый сдвиг можно ввести в систему без изменения коэффициента усиления системы, чтобы система пришла на границу устойчивости.

Для определения запаса устойчивости по фазе из рисунка 1.5б из начала координат проводится окружность единичного радиуса. Точки пересечения окружности показывают фазу, когда амплитуда равна единице. Угол Δφ, на который надо повернуть характеристику до 180º, равен запасу устойчивости по фазе.

В инженерной практике получил применение анализ устойчивости по логарифмическим характеристикам, так как эти характеристики строятся по передаточным функциям разомкнутой САУ. Он основан на том, что если годограф $W_р$ не охватывает точку с координатами (-1, j0), то он пере-
секает вещественную ось справа от точки (-1, j0) (рисунок 1.4а). В другом случае годограф будет пересекать вещественную ось в точке на отрезке
(-∞,-1).

В логарифмической системе координат ЛАФЧХ границей устойчивости по амплитуде является ось «0» дБ (20 · lg1 = 0), а границей устойчивости по фазе ±180º.

Таким образом, из критерия устойчивости Найквиста следует: для того, чтобы замкнутая система была устойчивая, необходимо, чтобы ЛАЧХ $L_р$ разомкнутой системы пересекала бы ось границы устойчивости «0» дБ раньше, чем фаза при этой частоте достигнет значения ± 180º (рисунок 1.5, на котором показан пример устойчивой системы – сплошная линия).

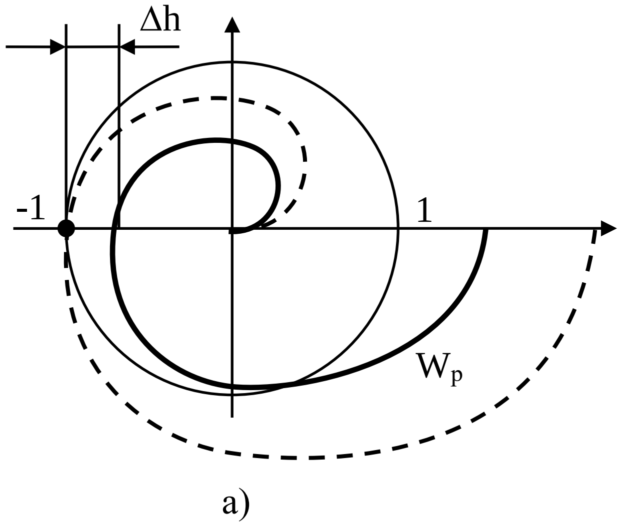


Рисунок 1.5 – Запасы устойчивости по амплитуде (а) и фазе (б)

Частота, при которой логарифмическая амплитудно-частотная характеристика пересекает ось «0» дБ, называется *частотой среза* системы. Разница между границей устойчивости -180^0 и значения ЛФЧХ при частоте среза и определяет запас устойчивости по фазе (рисунок 1.6)

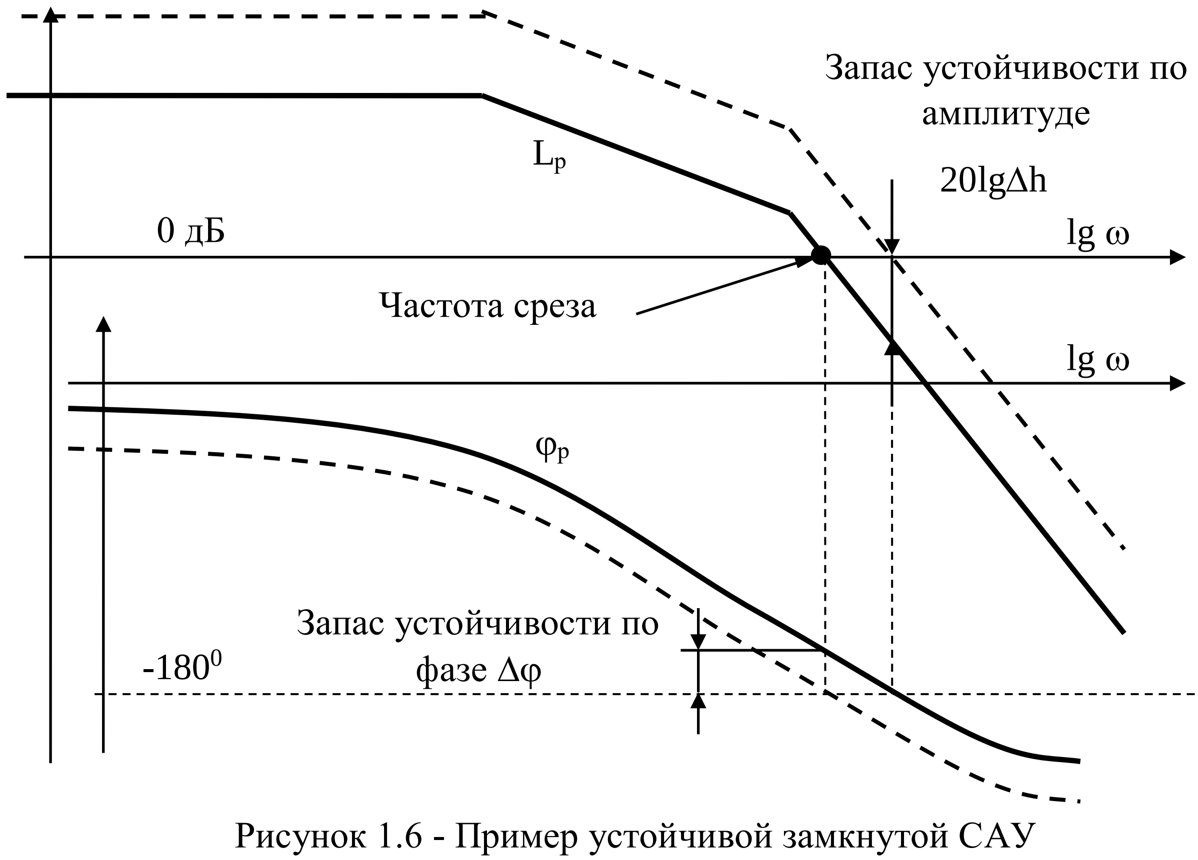


Рисунок 1.6 - Пример устойчивой замкнутой САУ