

1 Показатели качества переходного процесса и их оценка различными методами

1.1 Оценка показателей прямым методом

О качестве переходного процесса принято судить по реакции системы на единичное ступенчатое воздействие. Показатели качества были введены в лекции 2.

Все показатели можно определить по графику переходного процесса, который снимается непосредственно на объекте управления (САУ), или рассчитывается исходя из системы дифференциальных уравнений, описывающих этот объект. Но есть существенные недостатки данного метода:

- при проектировании необходимо построить модель для определения переходной функции,
- не выясняет связи между параметрами объекта управления и качествами переходного процесса.

Вследствие этого, применяют косвенные методы оценки качественных показателей, которые не требуют решения дифференциальных уравнений (или построения физического макета). Существуют 3 основных косвенных метода:

- корневой,
- частотный,
- интегральный.

1.2 Оценка корневым методом

Оценка качества процесса регулирования по расположению нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы.

Замкнутую передаточную функцию можно представить в виде:

$$W(p) = \frac{b_m (p - \gamma_1) \dots (p - \gamma_m)}{a_n (p - p_1) \dots (p - p_n)} \quad (1.1)$$

Переходной процесс будет описываться следующим уравнением:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t}, \quad (1.2)$$

где p_i – корни характеристического уравнения.

Если есть комплексно-сопряженные корни, то переходной процесс:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^m 2C_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k), \quad (1.3)$$

где $-\alpha_k \pm \omega_k = p_k$ – комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения.

1 Вывод: если имеются комплексно-сопряженные корни, то переходной процесс будет колебательным.

Итак, переходной процесс представляет собой сумму экспонент с разной длительностью затухания. Следовательно, оценить время переходного процесса можно по самой медлительной составляющей. При входе в 1-5% зону значение экспоненты будет равно $(0.01 \dots 0.05) e^{\alpha_i T_p}$, откуда время регулирования:

$$T_p = \frac{\ln(0.01 \dots 0.05)}{-\alpha_i} = (3 \dots 5) \frac{1}{\alpha_i}. \quad (1.4)$$

2 Вывод: время переходного процесса можно оценить по наименьшему значению реальной части корней характеристического уравнения. Для повышения быстродействия необходимо добиться увеличения этого значения.

Очевидно, что если представить САУ с помощью набора звеньев, то найдя звено с наибольшей постоянной времени можно также оценить время переходного процесса.

Число колебаний и колебательность системы можно оценить, зная мнимую часть корня самой медленной составляющей переходного процесса. Период колебаний:

$$T_k = \frac{1}{\omega_i}. \quad (1.5)$$

Колебательность подразумевает число колебаний системы во время T_p и, чем больше система сделает колебаний, тем больше колебательность. Очевидно, что чем больше период колебаний, тем менее колебательная система и, чем быстрее происходит затухание колебаний, тем менее колебательная система. Для оценки определим во сколько раз изменилась амплитуда синусоиды за время, равное T_p :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{C_i e^{p_i(t+T_k)}}{C_i e^{p_i t}} = e^{p_i T_k} = e^{-\frac{\alpha_i}{\omega_i}}. \quad (1.6)$$

Очевидно, что, чем меньше значение предыдущего выражения, тем быстрее происходит затухание колебаний. Следовательно, можно ввести показатель колебательности:

$$\mu = \omega / \alpha, \quad (1.7)$$

который оценивает колебательность системы: чем он больше, тем выше колебательность. Рассмотрим параметр μ для колебательного звена:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{T}; \quad \omega = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}; \quad \mu = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

При $\varepsilon=0$ $\mu=\infty$, при $\varepsilon=1$, $\mu=0$.

3 ВЫВОД: колебательность системы оценивается по корню самой медленной составляющей. Колебательность сохраняется при сохранении пропорции, между мнимой и реальной частью данного корня. Поэтому для получения требуемой колебательности необходимо, чтобы все корни на комплексной плоскости лежали в пределах лучей с углами наклона $\varphi = \arctg \mu$. (рисунок 7.1).

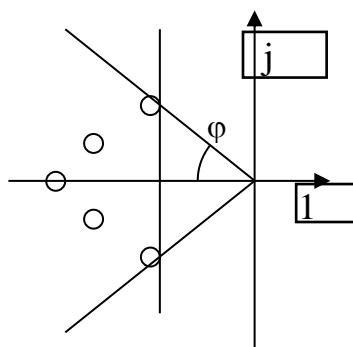


Рисунок 7.1

1.3 Частотные методы

Переходную характеристику можно выразить через ВЧХ:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{P(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) \right) d\omega. \quad (1.8)$$

Из данного уравнения можно видеть, что переходной процесс можно построить при известной вещественной частотной характеристике.

ВЫВОД: оценить качество переходного процесса можно по форме вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

Для оценки переходного процесса по ВЧХ замкнутой системы ее необходимо построить.

Пусть

$$W_3(j\omega) = P_3(\omega) + jQ_3(\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} = \frac{H(\omega)e^{j\theta(\omega)}}{1 + H(\omega)e^{j\theta(\omega)}}, \quad (1.9)$$

где $H(\omega)$ – АЧХ разомкнутой системы;

$\Theta(\omega)$ – ФЧХ разомкнутой системы.

Проведя тригонометрические преобразования уравнения (7.9) ВЧХ замкнутой системы можно представить следующим образом:
тогда:

$$P_3(\omega) = \frac{H(\omega)\cos(\theta(\omega)) + (H(\omega))^2}{1 + 2H(\omega)\cos(\theta(\omega)) + (H(\omega))^2}. \quad (1.10)$$

По формуле (7.10) построена номограмма для определения ВЧХ замкнутой системы с единичной обратной связью по ЛАФЧХ разомкнутой системы $L_p=20\lg H(\omega)$, $\Theta(\omega)/1/$.

Алгоритм построения для системы с обратной связью, отличной от единицы:

1) строятся $L_p(\omega)$, $\varphi_p(\omega)$ как сумма логарифмических характеристик прямого (L_p , φ_p) и обратного каналов (L_0 , φ_0),

2) для конкретной частоты откладываются по осям номограммы эти значения, ищем точку с этими координатами, определяем ближайшее значение P и Q ,

3) определяем $P_3 = \frac{P \cdot P_0 + Q \cdot Q_0}{P_0^2 + Q_0^2}$. Значения P_0 и Q_0 можно определить по

номограммам в $/1/$ в зависимости от значений L_0 и φ_0 ;

4) повторяем п. 2-3 для других частот.

Или другой способ: определяем логарифмические характеристики замкнутой системы по номограмме замыкания, потом по номограммам в $/1/$ строим ВЧХ.

Выделим несколько свойств ВЧХ, которые позволят оценить качество САУ:

1) установившееся значение переходного процесса будет равно значению ВЧХ при $\omega=0$;

2) начальное значение ПХ определяется значением ВЧХ в точке $\omega=\infty$ (чаще всего равно 0);

3) перерегулирование при невозрастающей ВЧХ ($P \geq 0$, $dP/d\omega \leq 0$) не превышает 18%;

4) переходной процесс будет происходить без перерегулирования, если ВЧХ будет монотонно убывающей, т.е. $dP/d\omega < 0$. Для ВЧХ, имеющей форму треугольника, переходной процесс будет происходить без перерегулирования;

5) время переходного процесса для трапецеидальной ВЧХ будет находится в интервале: $\frac{\pi}{\omega_{\Pi}} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_{\Pi}}$. Время регулирования тем больше, чем

больше коэффициент (хи) $\chi = \frac{\omega_d}{\omega_{\Pi}}$ (см. рисунок 7.2);

6) при изменении масштаба по оси ординат ВЧХ, также изменяется масштаб по оси ординат переходной характеристики (ПХ):

$$n * h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{n \cdot P(\omega)}{\omega} \sin(\omega \cdot t) \right) d\omega; \quad (1.11)$$

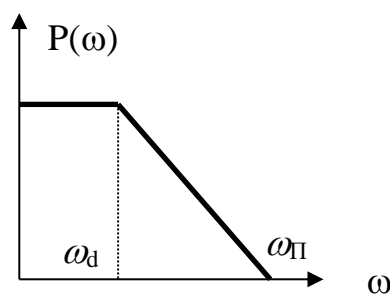


Рисунок 7.2 - Трапециидальная ВЧХ

7) при увеличении масштаба аргумента ВЧХ ω во столько же раз уменьшится масштаб по оси t ПХ:

$$h'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{P(\omega \cdot n)}{\omega} \sin(\omega \cdot t) \right) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{P(\omega')}{\omega'} \sin\left(\omega' \frac{t}{n}\right) \right) d\omega' = h\left(\frac{t}{n}\right); \quad (1.12)$$

8) любая ВЧХ может быть представлена алгебраической суммой трапециидальных ВЧХ;

9) Переходные характеристики для ВЧХ, отличающихся в области высоких частот (больше частоты положительности), будут отличаться только в начальные моменты времени, а показатели качества будут примерно одинаковыми;

10) Переходные характеристики для ВЧХ, отличающихся в области низких частот, будут существенно отличаться друг от друга и соответственно иметь разные показатели качества.

ВЫВОДЫ:

1) по $P(0)$ определяется $h_{уст}$;

2) по $P(\infty)$ определяется $h(0)$;

3) наличие максимума P_{max} и минимума P_{min} свидетельствует о перерегулировании и колебательности, и, чем больше размах, тем больше перерегулирование σ_m :

$$\sigma_m \leq \frac{1.18P_{max} - P(0)}{P(0)} \cdot 100\%; \quad (1.13)$$

4) время регулирования оценивается по ω_n , более точно по номограммам Солодовникова (необходимо знать частоту среза ω_c);

5) чем круче идет ВЧХ в области частоты положительности, тем больше время регулирования и колебательность.

1.4 Построение переходной характеристики по ВЧХ методом трапеций (по h -таблицам).

Любую ВЧХ можно разбить на алгебраическую сумму нескольких трапеций. Поэтому можно вычислить переходной процесс для граничного случая –

единичные трапецидальные ВЧХ, имеющие единичную высоту и частоту $\omega_0=1$ и параметр (хи) $\chi=0\dots 1$. Путем вычисления обратного преобразования Фурье были получены h-таблицы /1/.

Алгоритм построения переходной характеристики по ВЧХ:

- 1) строится ВЧХ замкнутой системы;
- 2) ВЧХ разбивается на трапеции (для правильного разбиения на трапеции необходимо соблюдать обязательные условия – трапеции, которые имеют основание меньше чем вершина, должны иметь отрицательную высоту, сумма высот трапеций должна равна $P(0)$ и все трапеции должны начинаться с частоты равной 0) (см. рисунок 7.3);
- 3) вычисляются необходимые параметры для каждой трапеции ($h_i, \omega_{0i}, \omega_{di}, \chi_i$);
- 4) по h-таблицам определяются табличные значения переходных характеристик для единичных трапеций;

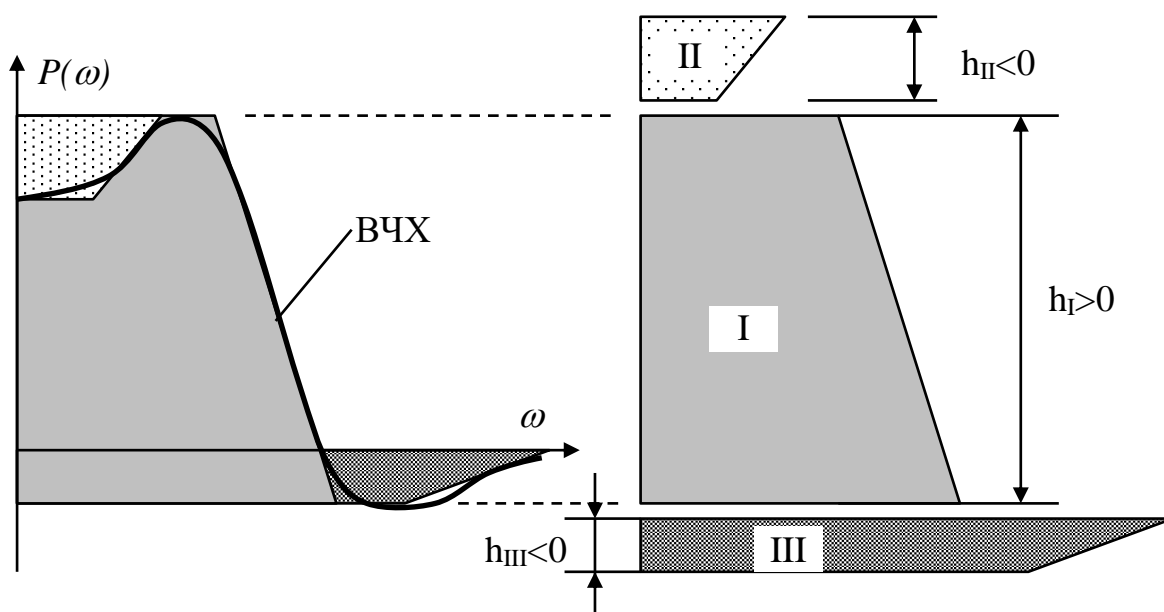


Рисунок 7.3 - Пример разбиения ВЧХ на трапеции

- 5) на основании свойств ВЧХ вычисляются истинные значения переходных характеристик как: $h_{ист\ i} = h_{табл.\ i} * h_i$; $t_{ист.\ i} = t_{табл.\ i} / \omega_{0i}$.
- 6) полученные таким образом переходные характеристики складываются с учетом знака;
- 7) проверяется установившееся значение переходной характеристики, которое должно быть равно $P(0)$.

1.5 Оценка переходной характеристики с помощью ЛАФЧХ замкнутой и разомкнутой системы

Оценка реакции системы при ступенчатом входном воздействии сопряжена, как правило, с громоздкими вычислениями. Поэтому очень важно уметь оценивать качество переходного процесса по виду логарифмических амплитудно-фазочастотных характеристик, которые строятся чаще всего асимптотическим (аппроксимированным) способом / 1,2,3 /.

По виду логарифмической амплитудной частотной характеристики системы можно оценить основные параметры качества переходного процесса.

Для оценки показателей качества САУ используется ЛАЧХ или разомкнутой, или замкнутой системы.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика **разомкнутой системы** условно разбивается на три диапазона частот:

- область высоких частот,
- область низких частот,
- область средних частот.

Поведение ЛАЧХ в области высоких частот характеризует начало переходного процесса и начальное значение выходной координаты:

1) если в этой области ЛАЧХ имеет отрицательный наклон, то значение выходной координаты в начальный момент времени равно нулю;

2) если ЛАЧХ имеет нулевой наклон, то выходная координата при $t = 0$ отлична от нуля и определяется значением предела передаточной функции замкнутой системы при переменной p стремящейся к ∞ ;

3) если ЛАЧХ имеет положительный наклон, то выходная координата при $t = 0$ стремится к бесконечности. Такие САУ имеют большую чувствительность к помехам, поэтому при проектировании следует избегать такого рода характеристик.

Поведение ЛАЧХ в области низких частот характеризует окончание переходного процесса, установившееся значение выходной координаты и точность системы;

1) если в этой области ЛАЧХ имеет отрицательный наклон, то проектируемая система астатическая, т.е. ошибка регулирования равна нулю;

2) если ЛАЧХ имеет нулевой наклон, то замкнутая система статическая, т.е. ошибка регулирования отлична от нуля. Значение выходной координаты можно определить по уравнению передаточной функции замкнутой САУ, в которой вместо оператора Лапласа « p » необходимо поставить нуль;

3) если ЛАЧХ имеет положительный наклон, то установившееся значение выходной координаты после окончания переходного процесса будет равно нулю.

Поведение ЛАЧХ в области средних частот (область в районе частоты среза системы) характеризует протекание переходного процесса:

1) если через частоту среза ЛАЧХ проходит с наклоном $- 60$ дБ/дек, то замкнутая система будет неустойчивой, и необходимо рассмотреть вопросы устойчивости и коррекции;

2) если через частоту среза ЛАЧХ проходит с наклоном $- 40$ дБ/дек, то замкнутая система будет иметь минимальные запасы устойчивости по амплитуде и фазе, и, следовательно, большое перерегулирование и колебательность. САУ также может быть и неустойчивой;

3) если через частоту среза ЛАЧХ проходит с наклоном – 20 дБ/дек, то замкнутая система будет иметь достаточные запасы устойчивости по амплитуде и фазе, и, следовательно, перерегулирование и колебательность будет не столь большим. Чем больше диапазон частот в районе частоты среза с наклоном – 20 дБ/дек, тем большими запасами устойчивости обладает замкнутая система, По частоте среза оценивается время регулирования:

$$t_p = \frac{k \cdot \pi}{\omega_c}. \quad (1.14)$$

Если имеется ЛАЧХ **замкнутой** системы, оценка качества переходного процесса производится следующим образом.

1. Установившееся значение выходной координаты h_∞ определяется ординатой ЛАЧХ при нулевой частоте.

2. Переходной процесс протекает без перерегулирования, если ординаты ЛАЧХ на всех частотах не превышают ординаты ЛАЧХ при нулевой частоте.

3. Максимум ЛАЧХ на любой частоте, кроме нулевой, свидетельствует о том, что процесс протекает с перерегулированием. Максимальное превышение выходной координаты приблизительно равно входному сигналу, умноженному на максимальное значение коэффициента усиления амплитуды при этой частоте.

4. Переходной процесс до достижения максимума протекает приблизительно по экспоненте с постоянной времени, определяемой частотой, при которой происходит изменение наклона ЛАЧХ с отрицательного на нулевой при движении по ЛАЧХ со стороны высоких частот в область средних частот.

5. Переходной процесс после достижения максимума изменяется также по экспоненте с постоянной времени, определяемой частотой, при которой происходит изменение наклона ЛАЧХ с нулевого на положительный (или с отрицательного на нулевой) при переходе из области средних частот в область низких частот. По значению этой частоты можно приближенно оценить время регулирования.

На рисунке 7.5 представлена ориентировочная картина переходного процесса, построенная из анализа ЛАЧХ рисунка 7.4, из которого можно сделать следующие выводы:

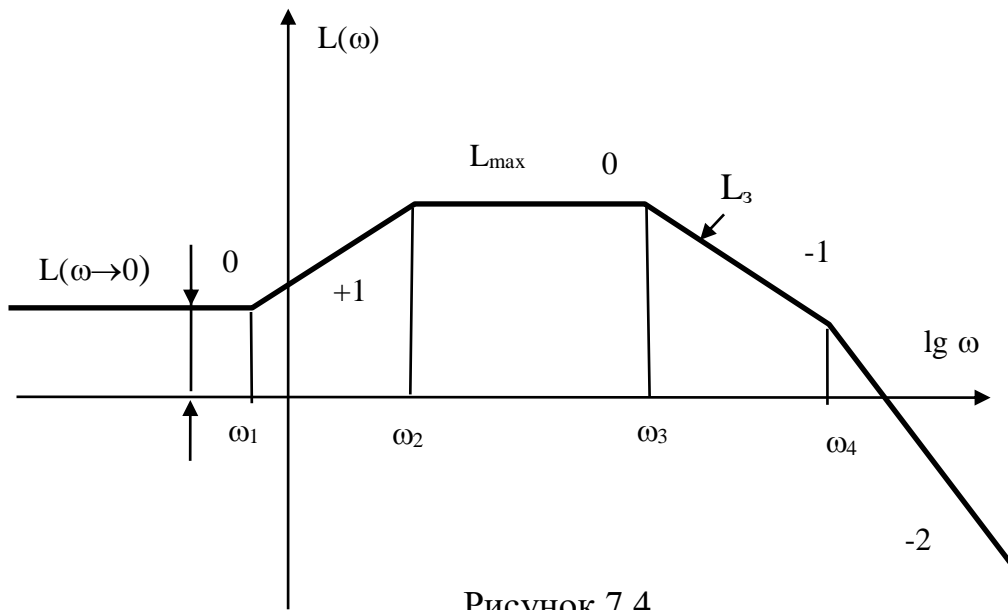


Рисунок 7.4

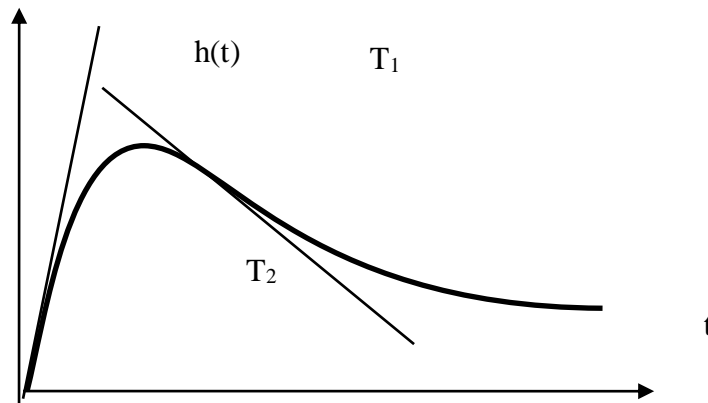


Рисунок 7.5

а) установившееся значение при единичном ступенчатом воздействии равно, соответствующему ЛАЧХ при $\omega \rightarrow 0$ ($L(\omega \rightarrow 0)$);

б) процесс регулирования протекает с перерегулированием, величина перерегулирования пропорциональна L_{\max} ;

в) до достижения максимума переходной процесс протекает по экспоненте с постоянной времени:

$$T_3 = \frac{1}{\omega_3}; \quad (1.15)$$

г) после достижения максимума переходной процесс также изменяется по экспоненте с постоянной времени:

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2}; \quad (1.16)$$

д) время переходного процесса ориентировочно равно:

$$t_p = (3 \div 5) \cdot T_2 + T_3. \quad (1.17)$$