1 Точность регулирования

1.1 Метод коэффициентов ошибок

После окончания переходных процессов система работает в режиме установившегося движения. Закон изменения выходной координаты зависит от точности воспроизведения системой заданного закона, с одной стороны, и, от влияния внешнего воздействия на выходную координату, с другой стороны.

Под точностью САУ чаще понимают отклонение действительного закона изменения выходной координаты от требуемого или заданного закона.

Это отклонение называется ошибкой регулирования. Ошибка регулирования записывается в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_x(t) + \varepsilon_f(t). \qquad (1)$$

где $\varepsilon(t)$ - ошибка регулирования САУ,

$\varepsilon_x(t)$ - ошибка воспроизведения задающего воздействия (задания),

$\varepsilon_f(t)$ - ошибка от действия внешнего возмущения.

На рисунке 1 представлена типовая структурная схема САУ.

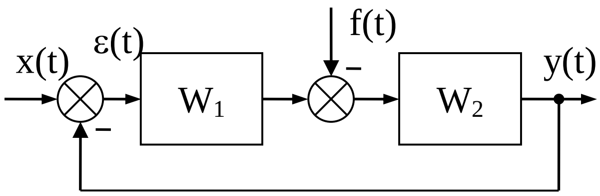

Рисунок 1 - Типовая структурная схема замкнутой САУ

С помощью формул структурных преобразований ошибка по заданию запишется в виде (при этом возмущающее воздействие равно нулю):

$$\varepsilon_x(p) = \frac{1}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)}\cdot x(p) = \frac{1}{1+W_p(p)}\cdot x(p) = W_{ex}(p)\cdot x(p), \qquad (2)$$

ошибка по возмущению (задающее воздействие равно нулю):

$$\varepsilon_f(p) = \frac{W_2(p)}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)}\cdot f(p) = \frac{W_2(p)}{1+W_p(p)}\cdot f(p) = W_{ef}(p)\cdot f(p), \qquad (3)$$

где

$W_{\varepsilon x} = \dfrac{1}{1+W_p(p)}$ – передаточная функция ошибки по заданию;

$W_{\varepsilon f} = \dfrac{W_2(p)}{1+W_p(p)}$ – передаточная функция ошибки по возмущению.

Передаточные функции представим в виде числового ряда, сходящегося при малых «р», что соответствует установившемуся режиму:

$$W_{ex}(p) = C_{0x} + C_{1x} \cdot p + C_{2x} \cdot p^2 + \cdots \qquad (4)$$

$$W_{ef}(p) = C_{0f} + C_{1f} \cdot p + C_{2f} \cdot p^2 + \cdots \qquad (5)$$

Коэффициенты этих рядов называются коэффициентами ошибок и определяются по формулам:

$$\begin{cases} C_0 = W_\varepsilon(p)\Big|_{p=0}; \\ C_1 = \dfrac{\partial W_\varepsilon(p)}{\partial p}\Big|_{p=0}; \\ C_2 = \dfrac{1}{2!} \cdot \dfrac{\partial^2 W_\varepsilon(p)}{\partial p^2}\Big|_{p=0}. \end{cases} \qquad (6)$$

Коэффициенты C_0, C_1, C_2 называются соответственно коэффициентами позиционной (статической) ошибки, скоростной ошибки и ошибки по ускорению.

Переходя от изображения к оригиналу, ошибка воспроизведения заданного закона изменения выходной координаты имеет вид:

$$\varepsilon_x(t) = C_{0x} \cdot x(t) + C_{1x} \cdot \frac{dx}{dt} + C_{2x} \frac{d^2x}{dt^2} + \cdots , \qquad (7)$$

ошибка по возмущению:

$$\varepsilon_f(t) = C_{0f} \cdot f(t) + C_{1f} \cdot \frac{df}{dt} + C_{2f} \frac{d^2f}{dt^2} + \cdots . \qquad (8)$$

1.2 Статическая и астатическая системы

Анализ ошибок регулирования обычно проводят при типовых воздействиях, рассмотренных в главе 2, например, при единичном ступенчатом воздействии, линейно-нарастаюшем, гармоническом и т. д.

Если на систему действуют ступенчатое воздействие, то

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} = \cdots = 0$$

и в данной САУ возможны только статические (позиционные) ошибки C_{0x}, C_{0f}.

Если статическая ошибка САУ равна нулю, то такая система называется астатическая. В противном случае – статическая.

Рассмотрим несколько вариантов реализации передаточных функций для схемы рисунка 1.

Вариант 1. Пусть система состоит из апериодически-форсирующих звеньев, т.е.

$$W_1(p) = k_1 \cdot \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + 1}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + 1} = k_1 \cdot \frac{A(p)}{B(p)}, \tag{9}$$

$$W_2(p) = k_2 \cdot \frac{c_k \cdot p^k + c_{k-1} \cdot p^{k-1} + \cdots + c_1 \cdot p + 1}{d_s \cdot p^s + d_{s-1} \cdot p^{s-1} + \cdots + d_1 \cdot p + 1} = k_2 \cdot \frac{C(p)}{D(p)}. \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (6), определим статические ошибки по заданию и возмущению.

$$C_{0x} = [Wex(p)]_{p=0} = [\frac{1}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)}]_{p=0} = \frac{1}{1+k_1\cdot k_2} = \frac{1}{1+k_p}, \tag{11}$$

$$C_{0f} = [Wef(p)]_{p=0} = [\frac{W_2(p)}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)}]_{p=0} = \frac{k_2}{1+k_1\cdot k_2} = \frac{k_2}{1+k_p}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, система является *статической* как по заданию, так и по возмущению. Уменьшение ошибок может быть достигнуто увеличением коэффициента усиления разомкнутой системы. Если заданы ошибки по заданию или возмущению, то по формулам (11) и (12) можно вычислить коэффициент усиления разомкнутой системы.

Однако увеличение коэффициента усиления приводит к уменьшению запасов устойчивости и по амплитуде и по фазе, и, следовательно, ухудшаются динамические свойства системы.

Вариант 2. Пусть в системе или имеется в составе, или принудительно включено интегрирующее звено после узла приложения возмущения (рисунок 2).

Тогда коэффициенты ошибок из (11) и (12) будут равны

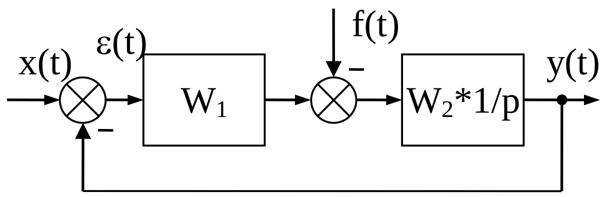

Рисунок 2

$$C_{0x} = [Wex(p)]_{p=0} = \left[\frac{1}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot {}^{1}\!/\!{}_{p}}\right]_{p=0} = \frac{p}{p+k_1\cdot k_2} = 0, \qquad (13)$$

$$C_{0f} = [Wef(p)]_{p=0} = \left[\frac{W_2(p)\cdot {}^{1}\!/\!{}_{p}}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot {}^{1}\!/\!{}_{p}}\right]_{p=0} = \frac{k_2}{p+k_1\cdot k_2} = \frac{1}{k_1}. \qquad (14)$$

Итак, при наличии интегрирующего звена, включенного после точки приложения возмущения, система будет *астатической* по заданию и *статической* по возмущению.

Вариант 3. Пусть в системе или имеется в составе, или принудительно включено интегрирующее звено до узла приложения возмущения (рисунок 3).

Тогда коэффициенты ошибок из (8.11) и (8.12) будут равны

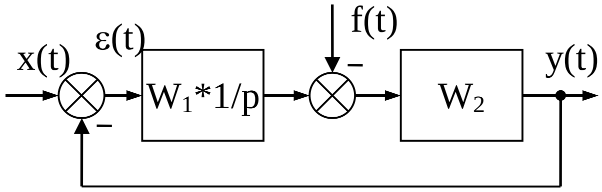

Рисунок 3

$$C_{0x} = [Wex(p)]_{p=0} = \left[\frac{1}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot {}^{1}\!/\!{}_{p}}\right]_{p=0} = \frac{p}{p+k_1\cdot k_2} = 0, \qquad (15)$$

$$C_{0f} = [Wef(p)]_{p=0} = \left[\frac{W_2(p)}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot {}^{1}\!/\!{}_{p}}\right]_{p=0} = \frac{k_2\cdot p}{p+k_1\cdot k_2} = 0. \qquad (16)$$

Итак, при наличии интегрирующего звена, включенного до точки приложения возмущения, система будет *астатической* и по заданию и по возмущению.

Таким образом, наличие интегрирующего звена приводит систему к астатизму, однако, наличие интегрирующего звена приводит к вводу в систему фазовый сдвиг в – 90º, что уменьшает запасы устойчивости и, следовательно *ухудшаются динамические свойства системы*.

1.3 Инвариантное управление

Рассмотрим структурную схему замкнутой системы, изображенную на рисунке 1.

Ошибка регулирования по заданию и возмущению равны соответственно (перенесем место приложения внешнего воздействия на вход системы):

$$E(p)=X(p)-Y(p)=X(p)-(X(p)+F(p)/W_1(p))\cdot W_1(p)\cdot W_2(p)/(1+ W_1(p)\cdot W_2(p)); \quad (17)$$

Как видно, ошибка регулирования будет зависеть от как параметров самой системы, так и от входного и возмущающих воздействий. Точность систем можно повысить путем компенсации влияния сигналов управления и возмущения за счет применения комбинированного управления. При полной компенсации система получается полностью инвариантна к внешним воздействиям. При этом повышается порядок астатизма.

Системы, инвариантные к возмущению.

Рассмотрим параллельную коррекцию, введенную в систему по возмущению (рисунок 4).

Требуется выбрать такое корректирующее звено $W_к$, чтобы ошибка по возмущению была бы равна 0. Будем считать, что задающее воздействие x(t)=0, тогда:

$$E=-Y=-W_2\cdot X_3=-W_2(X_2-F)=-W_2X_2+W_2F=W_2F-W_2W_1E_1=$$

$$=W_2F-W_2W_1(E+W_kF)=W_2F-W_2W_1E-W_2W_1W_kF,$$

$$E=\frac{W_2F(1-W_1W_к)}{1+W_1W_2}. \quad (18)$$

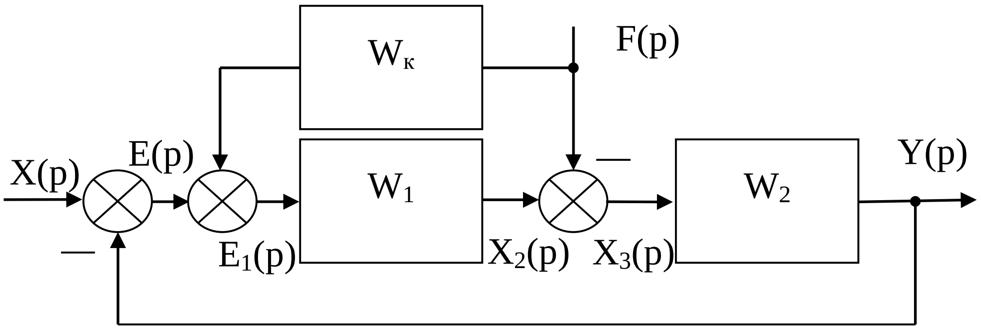

Рисунок 4

Чтобы ошибка была бы равна нулю, нужно $1-W_1W_k=0$,

$$W_K = \frac{1}{W_1}. \tag{19}$$

Пусть:

1) $W_1=k$, тогда $W_k=1/k$

2) $W_1=k/(Tp+1)$, тогда $W_k=(Tp+1)/k$

и т.д.

Чем больше порядок передаточной функции звена W_1, тем сложнее реализовать корректирующее звено. Поэтому при большой сложности удовлетворяются частичному удовлетворению условия. При этом система не будет полностью инвариантна к возмущающему воздействию. Но удается повысить порядок астатизма.

Пример. Пусть система будет иметь структуру как показано на рисунке 5.

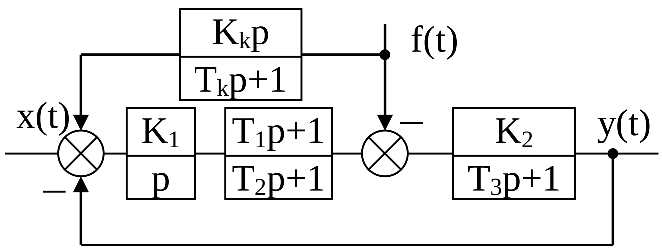

Рисунок 5

При полной инвариантности по возмущению передаточная функция корректирующего звена должна иметь вид:

$$W_k = \frac{K_k p(T_{k1}p+1)}{T_{k2}p+1}.$$

Из-за сложности реализации такого звена сделаем упрощение

$$W_k = \frac{K_k p}{T_k p + 1}.$$

<u>Ошибка нескорректированной системы</u> будет иметь вид:

$$E(p) = \frac{K_2 \cdot F(p)}{(T_3 p + 1) \cdot \left(1 + \frac{K_2 K_1}{T_3 p + 1} \cdot \frac{T_1 p + 1}{p(T_2 p + 1)}\right)} = \frac{K_2 (T_2 p + 1) \cdot F(p)}{(T_3 p + 1)(T_2 p + 1)p + K_2 K_1 (T_1 p + 1)} p$$

Как видно система будет иметь порядок астатизма равный 1 (т.е. система будет астатична только в статическом режиме).

<u>Ошибка скорректированной системы</u> (по выведенному выше уравнению для ошибки):

$$E(p) = \frac{\left[1 - \frac{K_1 K_k (T_1 p + 1)}{(T_2 p + 1)(T_k p + 1)}\right] \frac{K_2}{(T_3 p + 1)}}{\left(1 + \frac{K_2 K_1}{T_3 p + 1} \cdot \frac{T_1 p + 1}{p(T_2 p + 1)}\right)} F(p) = \frac{\frac{T_1 T_k p + T_2 + T_k - T_1}{(T_k p + 1)} K_2}{(T_3 p + 1)(T_2 p + 1)p + K_2 K_1 (T_1 p + 1)} p^2 F(p)$$

Где $K_k = 1/K_1$ Порядок астатизма увеличился на единицу (т.о. ошибка по положению и по скорости будет равна нулю). Если принять условие, что $T_2 + T_k = T_1$, то порядок астатизма еще увеличится на единицу.

Чаще всего на практике передаточную функцию корректирующего звена выбирают такой, чтобы скомпенсировать ошибки в статическом режиме и скоростную ошибку.

Системы, инвариантные по заданию.

Рассмотрим параллельную коррекцию, введенную в систему по заданию (рисунок 6).

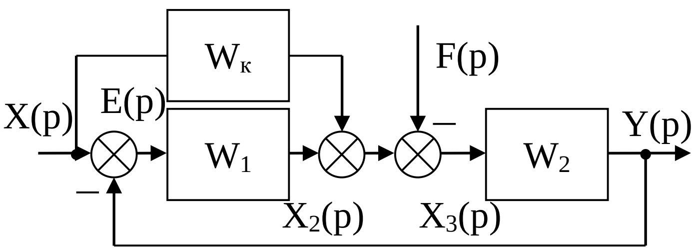

Рисунок 6

Положим, что F(p)=0. Тогда:

$$E=X-Y=X-W_2X_3=X-W_2(X_2+X*W_k)=X-W_2X_2-W_2W_kX=X(1-W_2W_k)-W_2W_1E;$$

$$E = X\frac{(1-W_2W_k)}{1+W_1W_2}.$$

Для того, чтобы ошибка была бы равна нулю, необходимо $1-W_2W_k=0$, или:

$$W_К = \frac{1}{W_2}. \qquad (20)$$

Для систем, инвариантных по управлению накладываются такие же ограничения по реализуемости корректирующего звена. Так же на практике чаще всего используют такие звенья, которые позволяют скорректировать статическую ошибку и скоростную ошибку.

Инвариантное управление используют чаще всего в системах, где ставится требование к высокой точности выходной координаты (например. в следящих системах).